72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Zadání úloh domácí části I. kola

Kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

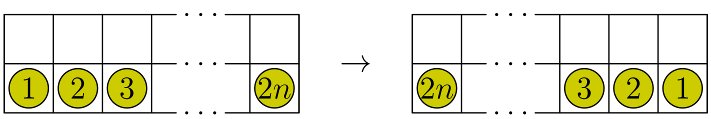
$$2x + \lfloor y \rfloor = 2022,$$
$$3y + \lfloor 2x \rfloor = 2023.$$

(Symbol $\lfloor a \rfloor$ značí *dolní celou část* reálného čísla a, tj. největší celé číslo, které není větší než a. Např. $\lfloor 1{,}9 \rfloor = 1$ a $\lfloor -1{,}1 \rfloor = -2$.) (*Jaroslav Švrček*)

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Na polopřímkách opačných k CA a BA leží postupně body B' a C' tak, že $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

(*Patrik Bak*)

3. Pro dané kladné celé číslo n uvažme obdélníkový hrací plán $2n \times 2$ a na něm $2n$ žetonů očíslovaných $1, 2, \ldots, 2n$ a rozmístěných jako na obrázku vlevo. V jednom tahu je možné posunout jeden žeton z jeho políčka na políčko sousedící stranou, pokud je prázdné.[*] Kolika nejméně tahy lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo?



(*Josef Tkadlec*)

4. Jsou dána dvě lichá přirozená čísla k a n. Martin pro každá dvě přirozená čísla i, j splňující $1 \leqq i \leqq k$ a $1 \leqq j \leqq n$ napsal na tabuli zlomek i/j. Určete medián všech těchto zlomků, tedy takové reálné číslo q, že pokud všechny zlomky na tabuli seřadíme podle hodnoty od nejmenší po největší (zlomky se stejnou hodnotou v libovolném pořadí), uprostřed tohoto seznamu bude zlomek s hodnotou q. (*Martin Melicher*)

5. Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC. Osa vnitřního úhlu u vrcholu A a osy stran AB, AC vymezují trojúhelník. Dokažte, že průsečík jeho výšek leží na těžnici z vrcholu A. (*Josef Tkadlec*)

6. Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou následovně:

$$a_1 = 3 \quad \text{a} \quad a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} - 1 \text{ pro všechna } n \geqq 2.$$

Dokažte, že existuje

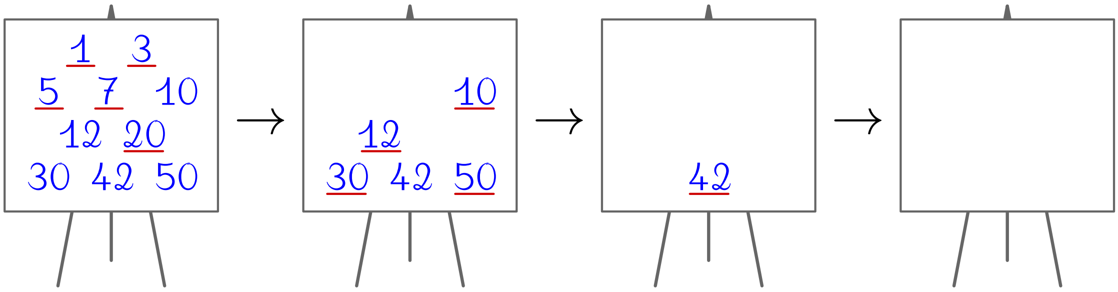
a) nekonečně mnoho prvočísel dělících alespoň jeden člen této posloupnosti;
b) nekonečně mnoho prvočísel nedělících žádný člen této posloupnosti.

(*Martin Melicher*)

[*] Hru si můžete vyzkoušet na http://skmo.sk/72a3.

Kategorie B

1. Na tabuli napíšeme deset navzájem různých přirozených čísel. V každém kroku nejdříve podtrhneme každé číslo, které není součtem žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli, poté všechna podtržená čísla smažeme. Například:



a) Dokažte, že pro libovolných deset napsaných čísel zůstane po konečném počtu kroků tabule prázdná.

b) Určete největší počet kroků, po jejichž provedení ještě nemusí zůstat tabule prázdná. Uveďte příklad deseti čísel, pro něž tohoto počtu dosáhneme.

(*Patrik Bak*)

2. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$. (*Jaromír Šimša*)

3. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají kvadratické trojčleny $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$ následující vlastnost: každá z rovnic

$$aP(x) + bQ(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad aQ(x) + bP(x) = 0$$

je kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. (*Jaroslav Švrček*)

4. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokažte, že $|CD| = |DE|$. (*Patrik Bak*)

5. Zkoumejme trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících podmínku $ab = c^2$.

a) Pro každé prvočíslo p uveďte příklad trojice (a, b, c), pro kterou platí $a+b-2c = p$.

b) Dokažte, že pro každou trojici (a, b, c) je $a + b + 2c$ složené číslo.

(*Josef Tkadlec*)

6. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané, M střed přepony AC a X průsečík přímky IM s přímkou BC. Dokažte, že pokud leží body B, I, M, C na jedné kružnici, je trojúhelník ABX rovnoramenný.

(*David Hruška*)

Kategorie C

1. Uvažujme 2022 zlomků

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \ldots, \frac{2021}{1}$$

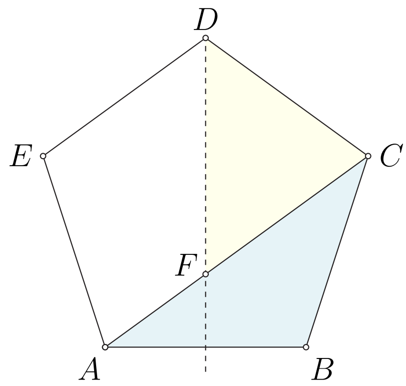
ve tvaru podílu dvou celých nezáporných čísel, jejichž součet je pro každý zlomek roven 2022. Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty? (*Jaroslav Zhouf*)

2. Šebestová má z pětiminutovek průměr známek přesně 1,12. Dokažte, že z nich má aspoň 22 jedniček. (Možné známky jsou 1, 2, 3, 4, 5.) (*Josef Tkadlec*)

3. V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB, N střed strany AC a P střed úsečky MN. Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.
(*Patrik Bak, Eliška Macáková*)

4. Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \ldots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$? (*Radek Horenský*)

5. Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky AC s osou strany AB označme F. Dokažte, že trojúhelníky ABC a CDF mají stejný obsah. (*David Hruška*)



6. Určete největší přirozené číslo $n \geqq 10$ takové, že pro libovolných 10 různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí následující tvrzení: Není-li ani jedno z těchto 10 čísel prvočíslem, pak je součet některých dvou z nich prvočíslem. (*Ján Mazák*)