Řešení úlohy 233

a) Objem polokoule:

$$V_{\mathsf{P}} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{2}{3}\pi r^3$$

Objem kuželu:

$$V_{\mathsf{K}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 v$$

Z rovnosti obou objemů vyplývá, že $v = 2r$.

b) Povrch polokoule:

$$S_{\mathsf{P}} = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

Povrch kuželu:

$$S_{\mathsf{K}} = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + (2r)^2} = \pi r^2 \left(1 + \sqrt{5}\right)$$

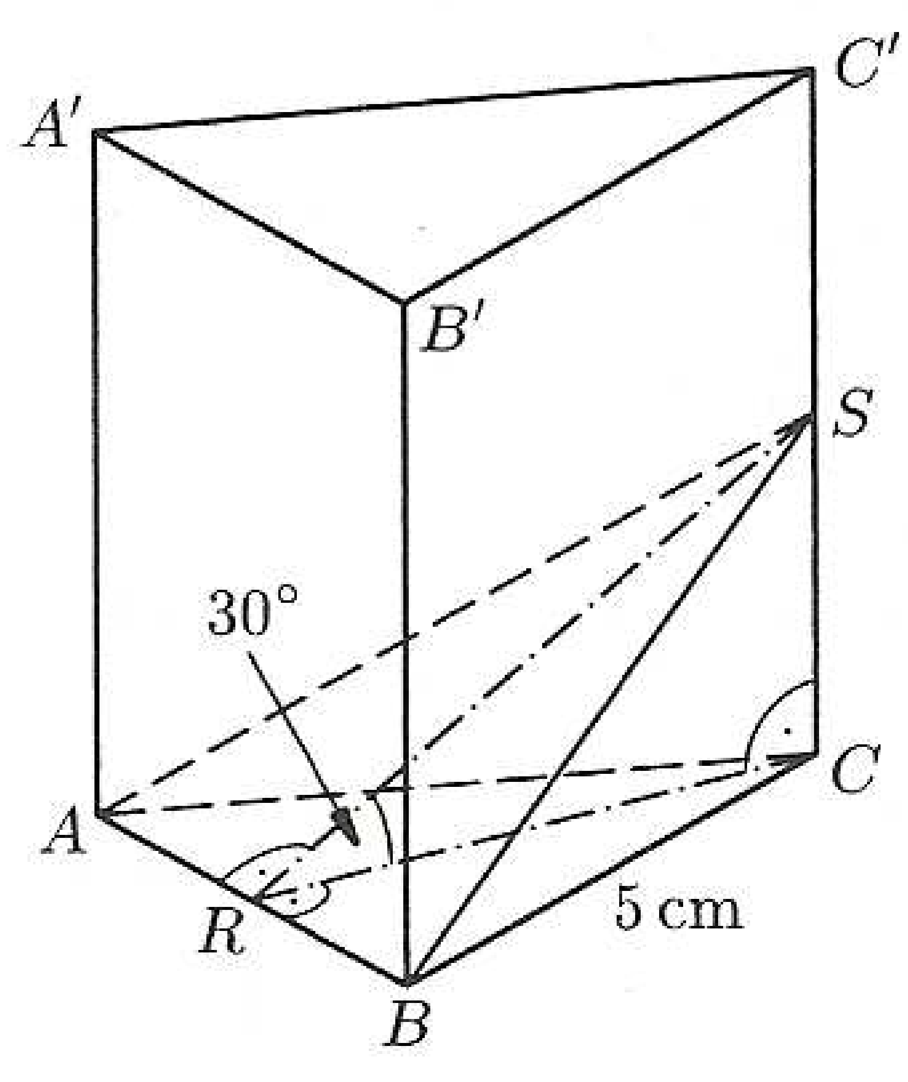
Protože

$$\frac{S_{\mathsf{K}}}{S_{\mathsf{P}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{3} \doteq 1{,}079,$$

má kužel přibližně o 7,9 % větší povrch než polokoule.

Řešení úlohy 234

Označme R střed hrany AB, viz obrázek:



Protože rovina RCS je kolmá k rovinám ABC, ABS, je odchylka těchto dvou rovin rovna velikosti úhlu CRS, tedy

$$|\sphericalangle CRS| = 30^\circ.$$

Úsečka RC je výškou rovnostranného trojúhelníku ABC, proto

$$|RC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5\right)\,\mathrm{cm}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku RCS platí $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{|CS|}{|RC|}$, odkud vypočteme

$$|CS| = |RC| \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,\mathrm{cm} = 2{,}5\,\mathrm{cm}.$$