Řešení úlohy 55

$$V(x) = \left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+2}\right] \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} =$$

$$= \frac{x+1-2(x+2)+(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} =$$

$$= \frac{x+1-2x-4+x^2+2x+1}{(x+1)^2(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} =$$

$$= \frac{x^2+x-2}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

Podmínky: $x \notin \{-2, -1, 2\}$

Řešení úlohy 56

a) V 56 litrech 96procentního roztoku je $(56 \cdot 0{,}96)$ litrů rozpouštěné látky a $(56 \cdot 0{,}04)$ litrů rozpouštědla.
Přidáme-li x litrů rozpouštědla, dostaneme $(56 + x)$ litrů roztoku, v němž bude množství rozpouštěné látky stejné. Aby to byl roztok 84procentní, musí platit

$$(56 + x) \cdot 0{,}84 = 56 \cdot 0{,}96, \qquad \text{odkud} \qquad x = 56 \cdot \tfrac{96}{84} - 56 = 8.$$

Je třeba přidat 8 litrů rozpouštědla.

b) Analogicky jako v a) musí pro přidané množství x litrů rozpouštědla platit

$$(a + x) \cdot q = a \cdot p, \qquad \text{odkud} \qquad x = a \cdot \frac{p}{q} - a = a \cdot \frac{p-q}{q}.$$

Řešení úlohy 57

a) Z rovnosti $V(a) : (a^4 + 3a^2 - 10) = a^2 + 5$ plyne:

$$V(a) = \left(a^4 + 3a^2 - 10\right)\left(a^2 + 5\right) = a^6 + 8a^4 + 5a^2 - 50$$

Aby bylo možné dělit, musí být

$$a^4 + 3a^2 - 10 \neq 0, \quad \text{tj.} \quad \left(a^2 + 5\right)\left(a^2 - 2\right) \neq 0,$$

odkud $a \neq \sqrt{2}$, $a \neq -\sqrt{2}$.

b) Z rovnosti $W(a) \cdot \left(a^4 + 3a^2 - 10\right) = a^7 + 3a^5 + 3a^4 - 10a^3 + 9a^2 - 30$ plyne

$$W(a) = \frac{a^7 + 3a^5 + 3a^4 - 10a^3 + 9a^2 - 30}{a^4 + 3a^2 - 10} = a^3 + 3$$

(konečný výsledek jsme získali vydělením mnohočlenů).
Násobit je možné pro každé $a \in \mathsf{R}$.