

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ANALYTICKÁ GEOMETRIE ELIPSY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 14. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 18 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák zná definici elipsy a způsoby jejího analytického vyjádření; umí určit charakteristické veličiny elipsy; zná vztah pro tečnu elipsy a umí řešit úlohy o vzájemné poloze přímky a elipsy |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Ukažte, že rovnice je obecnou rovnicí elipsy. Určete její polohu v soustavě souřadné, střed, ohniska a vrcholy.**

*Řešení:*

*Obecnou rovnici elipsy upravíme na osový tvar:*

*Z rovnice vyčteme:*

*- střed elipsy*

*- velikost hlavní poloosy a = 13 a vedlejší poloosy b = 12*

*- poznáme, že hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y*

*Vypočítáme excentricitu e:*

*Určíme hlavní vrcholy:*

*Určíme vedlejší vrcholy:*

*Určíme ohniska:*

**2) Určete velikost úhlu ϕ, pod kterým je z bodu vidět elipsu**

*Řešení:*

*Úhel ϕ je úhel, který svírají tečny vedené z bodu A k elipse E.*

*Tečny budeme hledat ve tvaru:*

*Bod A na tečně leží:*

*Určili jsme y-ovou souřadnici bodu dotyku. Musíme určit ještě jeho x-ovou souřadnici. Určíme z podmínky, že bod T je zároveň i bodem elipsy E:*

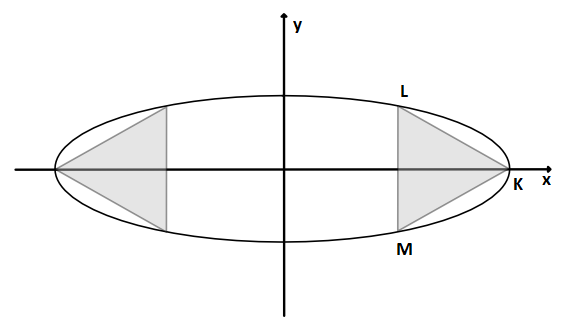
*Body dotyku existují dva:*

*Souřadnice bodů dotyku dosadíme do vztahu pro tečnu elipsy E, získáme obecné rovnice dvou tečen a zapíšeme jejich normálové vektory:*

*Určíme úhel ϕ:*

*Elipsa E je z bodu A vidět pod úhlem .*

**3) Do elipsy je vepsán rovnostranný trojúhelník souměrný podle její hlavní osy. Určete souřadnice jeho vrcholů.**

*Řešení:*

*Jak ukazuje obrázek, takové trojúhelníky existují dva a jsou navzájem souměrné podle osy y. Úlohu tedy budeme řešit pouze pro trojúhelník KLM.*

*Vrchol K je totožný s hlavním vrcholem elipsy .*

*Zbývají vrcholy L, M mají stejnou x-ovou souřadnici a jejich y-ové souřadnice jsou opačná čísla .*

*Trojúhelník KLM je rovnostranný*

*Souřadnice bodů L, M musí vyhovovat rovnici elipsy E, proto vyjádření ① dosadíme do rovnice elipsy ⇒*

*Ke každému x pomocí vztahu ① dopočítáme y*

*Vrcholy trojúhelníka KLM mají souřadnice:*

*Trojúhelník k němu souměrný podle osy y má vrcholy:*

**4) Určete parametr b  R∧ b ≠ 0 tak, aby přímka p byla tečnou elipsy E:**

**p: 2x + 3y – 12 = 0; E: b2x2 + 25y2 = 25b2.**

*Řešení:*

*Z rovnice přímky vyjádříme neznámou y a toto vyjádření dosadíme do rovnice elipsy.*

*Rovnici ① upravíme na kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem*

*Protože přímka p má být tečnou elipsy E, musí mít rovnice ② jediné řešení; jediné řešení bude právě tehdy, když diskriminant bude roven 0.*

*Po úpravách dostaneme:*

*Protože b představuje velikost hlavní poloosy, tak řešením je pouze .*

Příklady k procvičování:

1) Napište rovnici elipsy, která se osy x dotýká v bodě a osy y v bodě

(správné řešení: )

2) Napište rovnice tečen elipsy , které jsou rovnoběžné s přímkou

(správné řešení: )

3) Napište rovnice tečen elipsy které mají směrnici

(správné řešení: )

4) Napište rovnici elipsy, která prochází bodem , její ohniska leží na ose x, excentricita e = 6 a její osy leží na souřadnicových osách x a y.

(správné řešení:)

5) Vypočítejte délku tětivy, kterou na elipse vytíná osa II. a IV. kvadrantu.

(správné řešení: )

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.