

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 4. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 18 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák zná definici paraboly a její analytické vyjádření vrcholovou i obecnou rovnicí, umí určit charakteristiky paraboly, ovládá řešení úloh o vzájemné poloze přímky a paraboly |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Napište vrcholovou rovnici paraboly, je-li dáno:**

 **a) vrchol** $V\left[0;0\right]$ **a ohnisko** $F\left[0; -8\right]$**,**

 **b) vrchol** $V\left[0;0\right]$ **a rovnice řídící přímky** $d:x=-2$**,**

 **c) vrchol** $V\left[-3;-2\right]$ **a rovnice řídící přímky** $d:y=-3$**,**

 **d) ohnisko** $F\left[2;1\right]$ **a rovnice řídící přímky** $d:x=7$**.**

*Řešení:*

*a) Ze zadání zjistíme, že se jedná o parabolu typu*

*Rovnice má tvar* $x^{2}=-2py$*. Je tedy nutné určit parametr p. Platí:* $\frac{p}{2}=\left|VF\right|⇒ \frac{p}{2}=8 ⇒p=16$

*Parabola má rovnici:* $x^{2}=-32y$

*b) Ze zadání vyplývá, že se jedná o parabolu typu*

*Rovnici hledáme ve tvaru* $y^{2}=2px$*. Musíme určit parametr p. Platí:* $\frac{p}{2}=\left|dV\right|⇒ \frac{p}{2}=2 ⇒p=4$

*Parabola má rovnici:* $y^{2}=8x$

*c) Toto zadání určuje parabolu typu*

*Rovnice je tvaru* $\left(x-m\right)^{2}=2p\left(y-n\right)$*. I v tomto případě je nutné určit hodnotu parametru p. Určíme jej stejně jako v zadání b:* $\frac{p}{2}=\left|dV\right|⇒ \frac{p}{2}=1 ⇒p=2$

*Parabola má rovnici:* $\left(x+3\right)^{2}=4\left(y+2\right)$

*d) Poslední zadání určuje parabolu typu*

*V tomto případě má rovnice paraboly tvar* $\left(y-n\right)^{2}=-2p\left(x-m\right)$*. Pro parametr p platí:*

$\left|dF\right|=p ⇒p=5$*. Uprostřed mezi řídící přímkou a ohniskem leží vrchol paraboly ⇒*$V\left[4,5;1\right]$*.*

*Parabola má rovnici:* $\left(y-1\right)^{2}=-10\left(x-4,5\right)$

**2) Napište vrcholovou rovnici paraboly, která prochází bodem** $A\left[4;5\right]$**, její osa má rovnici** $x=2$ **a tečna ve vrcholu je přímka o rovnici** $y-1=0$**.**

*Řešení:*

**

 *Situaci zakreslíme do soustavy souřadné. Je vidět, že rovnici paraboly budeme hledat ve tvaru* $\left(x-m\right)^{2}=2p\left(y-n\right).$ *Snadno určíme souřadnice vrcholu paraboly* $⇒V\left[2;1\right]$*.*

*Do rovnice paraboly dosadíme souřadnice bodu A i vrcholu V a určíme hodnotu parametru p.*

$$\left(4-2\right)^{2}=2p\left(5-1\right) ⇒2p=1$$

 *Parabola má rovnici:* $\left(x-2\right)^{2}=y-1$

**3) Napište rovnici paraboly, která prochází body** $A\left[1;2\right], B\left[-1;5\right], C\left[7;5\right].$

*Řešení:*

*Zakreslíme-li si body do soustavy souřadné, uvědomíme si, že rovnice paraboly bude mít tvar:* $\left(x-m\right)^{2}=2p\left(y-n\right)$

*Z polohy bodů B a C určíme rovnici osy paraboly* $x=3$ *a tím zároveň známe x-ovou souřadnici vrcholu.*

*Nyní ještě musíme určit n, p. Určíme řešením soustavy rovnic:*

$$\left(1-3\right)^{2}=2p\left(2-n\right)$$

$$\left(-1-3\right)^{2}=2p\left(5-n\right)$$

$$4=2p\left(2-n\right)$$

$$16=2p\left(5-n\right)$$

$$2=p\left(2-n\right)⇒p=\frac{2}{2-n}$$

$$8=p\left(5-n\right)$$

$$8=\frac{2}{2-n}∙\left(5-n\right) ⇒16-8n=10-2n ⇒n=1$$

*A dopočítáme p:* $p=\frac{2}{2-1}=2$

*Parabola má rovnici:* $\left(x-3\right)^{2}=4\left(y-1\right)$

*Poznámka: 1)Úlohu lze řešit přes soustavu tří rovnic s neznámými m, n, p:*

$$\left(1-m\right)^{2}=2p\left(2-n\right)$$

$$\left(-1-m\right)^{2}=2p\left(5-n\right)$$

$$\left(7-m\right)^{2}=2p\left(5-n\right)$$

*2) Můžeme také využít rovnici kvadratické funkce* $y=ax^{2}+bx+c$ *a řešit soustavu rovnic s neznámými a, b, c:*

$$2=a+b+c$$

$$5=a-b+c$$

$$5=49a+7b+c$$

**4) Ukažte, že rovnice** $2x^{2}-6x-10y-3=0$ **je rovnicí paraboly. Určete její charakteristiky. Parabolu zakreslete do soustavy souřadné a vypočítejte souřadnice jejích průsečíků s osami.**

*Řešení:*

*Rovnici upravíme na vrcholový tvar:*

$$2\left(x^{2}-3x\right)-10y-3=0$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}-2∙\frac{9}{4}=10y+3$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}=10y+\frac{15}{2}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}=5y+\frac{15}{4}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}=5\left(y+\frac{3}{4}\right)$$

*Jedná se o parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s osou y a parametr* $p=\frac{5}{2}$*.*

*Vrchol paraboly:* $V\left[\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right]$

*Ohnisko paraboly:* $F\left[\frac{3}{2};-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right] ⇒F\left[\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$

*Rovnice řídící přímky d:* $y=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4} ⇒y=-2 ⇒y+2=0$

*Osa paraboly o:* $x=\frac{3}{2}$

*Průsečík s osou y: do rovnice paraboly dosadit x = 0* $⇒ A\left[0;-\frac{3}{10}\right]$

*Průsečíky s osou x: do rovnice paraboly dosadit y = 0 a řešit kvadratickou rovnici*

$$2x^{2}-6x-3=0$$

$$x\_{1,2}=\frac{6\pm \sqrt{36+24}}{4}=\frac{3\pm \sqrt{15}}{2} ⇒B\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2};0\right], C\left[\frac{3-\sqrt{15}}{2};0\right]$$

**

**5) Určete souřadnice vrcholů a délku strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného do paraboly** $y^{2}=5x$ **tak, že jeden vrchol trojúhelníka splývá s vrcholem paraboly.**

*Řešení:*

****

*Z obrázku je patrné, že body B a C mají stejnou x-ovou souřadnici a jejich y-ové souřadnice jsou opačná čísla. Přímka AB má směrový úhel 30° a tedy rovnici* $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$*.*

*Souřadnice bodu B určíme, vyřešíme-li soustavu rovnic:*

$$y^{2}=5x a y=\frac{\sqrt{3}}{3}x ⇒$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^{2}=5x ⇒\frac{1}{3}x^{2}-5x=0 ⇒ x^{2}-15x=0 ⇒x\left(x-15\right)=0 ⇒ x\_{1}=0, x\_{2}=15$$

*Dopočítáme y-ové souřadnice* $⇒ y\_{1}=0, y\_{2}=5\sqrt{3}$

*Vrcholy trojúhelníka mají souřadnice:* $A\left[0;0\right], B\left[15;5\sqrt{3}\right], C\left[15;-5\sqrt{3}\right]$

*Zbývá určit velikost strany trojúhelníka.*

$$\left|AB\right|=\sqrt{\left(b\_{1}-a\_{1}\right)^{2}+\left(b\_{2}-a\_{2}\right)^{2}}= \sqrt{15^{2}+\left(5\sqrt{3}\right)^{2}}=\sqrt{225+75}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$$

**6) Určete nejkratší vzdálenost bodu na parabole** $y^{2}=10x$ **od přímky** $p:2x-y+2=0.$

*Řešení:*

*Nejkratší vzdáleností je vzdálenost dané přímky p od bodu dotyku T tečny paraboly t rovnoběžné s přímkou p.*

*Přímka p a tečna paraboly t s ní rovnoběžná budou mít stejné směrnice.*

*Směrnicový tvar přímky p:* $y=2x+2 ⇒ k\_{p}=2$

*Rovnice tečny t k dané parabole bude mít tvar:* $yy\_{T}=5\left(x+x\_{T}\right) ⇒y=\frac{5}{y\_{T}}\left(x+x\_{T}\right) ⇒ k\_{t}=\frac{5}{y\_{T}}$

*Porovnáním obou směrnic vypočítáme y-ovou souřadnici bodu dotyku:* $y\_{T}=\frac{5}{2}$

*Bod dotyku leží na parabole, proto z její rovnice určíme x-ovou souřadnici bodu dotyku:*

$$x\_{T}=\frac{y\_{T}^{2}}{10} ⇒ x\_{T}=\frac{5}{8}$$

*Bod dotyku má souřadnice:* $T\left[\frac{5}{8};\frac{5}{2}\right]$

*Vypočítáme vzdálenost bodu T od přímky p.*

$$\left|Tp\right|=\frac{\left|ax\_{T}+by\_{T}+c\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\frac{\left|2∙\frac{5}{8}-\frac{5}{2}+2\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{4\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{20}$$

**7) Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s některou souřadnicovou osou, vrchol** $V\left[-1;5\right]$ **a na ose x vytíná tětivu o délce 10.**

*Řešení:*

**

*Zakreslíme-li si situaci, bude řešení snadné.*

*Parabola má rovnici ve tvaru:* $\left(x-m\right)^{2}=-2p\left(y-n\right)$

*Souřadnice vrcholu jsou dané, zbývá určit parametr p.*

*Jestliže tětiva na ose x má velikost 10, tak body A a B mají souřadnice:* $A\left[-6;0\right], B\left[4;0\right]$

*Dosadíme-li nyní do rovnice paraboly souřadnice vrcholu a jednoho z bodů A, B, vypočítáme parametr p.*

$$\left(4+1\right)^{2}=-2p\left(0-5\right) ⇒p=2,5$$

*Rovnice paraboly:* $\left(x+1\right)^{2}=-5\left(y-5\right)$

Příklady k procvičování:

1) Napište vrcholovou rovnici paraboly, je-li dáno:

 a) ohnisko $F\left[5;-3\right]$ a rovnice řídící přímky $d:y=-1$,

 b) vrchol $V\left[3;-4\right]$ a rovnice řídící přímky $d:x=5$,

 c) vrchol $V\left[-2;1\right]$ a ohnisko $F\left[-2;4\right]$,

 d) vrchol $V\left[-4;-2\right]$, bod A$\left[-1;2\right]$ a osa paraboly rovnoběžná s osou x.

(správné řešení: a) $\left(x-5\right)^{2}=-4\left(y+2\right)$; b) $\left(y+4\right)^{2}=-8\left(x-3\right)$;

 c) $\left(x+2\right)^{2}=12\left(y-1\right)$; d) $\left(y+2\right)^{2}=\frac{16}{3}\left(x+4\right)$)

2) Určete parametr, souřadnice vrcholu a ohniska, rovnici osy a rovnici řídící přímky paraboly $y^{2}-7x-6y-19=0$.

(správné řešení: $p=\frac{7}{2};V\left[-4;3\right];F\left[-\frac{9}{4};3\right];o:y=3;d:x=-\frac{23}{4}$)

3) Napište vrcholovou rovnici paraboly ($o∥x^{+}$), jsou-li dány její tři body: $A\left[-5;3\right], B\left[1;9\right], C\left[-\frac{7}{2};6\right]$.

(správné řešení: $\left(y-3\right)^{2}=6\left(x+5\right)$)

4) Vyšetřete vzájemnou polohu paraboly $y^{2}=9x$ a přímky $3x-7y+30=0$. A pokud existují společné body, určete jejich souřadnice.

(správné řešení: přímka je sečnou, $A\left[4;6\right], B\left[25;15\right]$)

5) Napište rovnici tečny paraboly $y^{2}-8x-6y-63=0$ v bodě dotyku $T\left[-1;?\right]$.

(správné řešení: $x-2y+23=0, x+2y+11=0$)

6) Napište rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadné, s osou v ose x, jestliže se dotýká přímky $p:2x+3y+18=0$.

(správné řešení: $y^{2}=16x$)

7) Ve kterém svém bodě má parabola $y^{2}=10x$ tečnu svírající s osou x úhel $φ=45°$.

(správné řešení: $T\_{1}\left[\frac{5}{2};5\right], T\_{2}\left[\frac{5}{2};-5\right]$)

8) Napište rovnice tečen paraboly $y^{2}=8x$ vedených z bodu $M\left[-7;5\right]$. Pak určete, jak velký úhel tečny svírají.

(správné řešení: $2x-7y+49=0, x+y+2=0, φ=60°57´$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.