

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**NEKONEČNÉ GEOMETRICKÉ ŘADY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština14. prosince 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a úlohy k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem nekonečné geometrické řady a umí jej aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Příklad 1**

Zdůvodněte konvergenci nekonečné geometrické řady a potom určete její součet:

$$\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)^{2}+\left(\sqrt{5}-2\right)^{3}+…$$

*Řešení*

Daná geometrická řada je konvergentní, jestliže její kvocient *q* splňuje podmínku $\left|q\right|<1$. V našem případě je $q=\sqrt{5}-2\rightarrow \left|q\right|<1$, řada je konvergentní a její součet existuje. Protože první člen je $a\_{1}=\sqrt{5}-2$ a kvocient je $q=\sqrt{5}-2$, můžeme psát:

$$s=\frac{a\_{1}}{1-q}=\frac{\sqrt{5}-2}{1-(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}-2}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-2}{3-\sqrt{5}}·\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}-6}{9-5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

**Příklad 2**

Určete součet nekonečné geometrické řady

$$1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\frac{81}{256}-\frac{243}{1024}+…$$

*Řešení*

Tuto úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. Buď a) přímo nebo b) po uspořádání na rozdíl dvou nekonečných geometrických řad s kladnými členy.

1. Přímou metodou určíme první člen a kvocient geometrické řady $a\_{1}=1;q=-\frac{3}{4}$ a dále již snadno určíme

$$s=\frac{1}{1-(-\frac{3}{4})}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}.$$

1. V tomto případě budeme mít dvě geometrické řady – tu, která je složená z lichých členů a tu, která je složená ze sudých členů zadané posloupnosti.

První posloupnost:

$a\_{1}=1;q=\frac{9}{16}$ a $s\_{1}=\frac{1}{1-\frac{9}{16}}=\frac{16}{7}$

Druhá posloupnost:

$a\_{1}=\frac{3}{4};q=\frac{9}{16}$ a $s\_{2}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{3·16}{4·7}=\frac{12}{7}$

Celkem je tedy

$$s=s\_{1}-s\_{2}=\frac{16}{7}-\frac{12}{7}=\frac{4}{7}.$$

**Příklad 3**

V množině reálných čísel řešte rovnici

$$2^{x}+4^{x}+8^{x}+16^{x}+…=1.$$

*Řešení*

Zadanou rovnici upravíme na tvar

$$2^{x}+\left(2^{x}\right)^{2}+\left(2^{x}\right)^{3}+\left(2^{x}\right)^{4}+…=1.$$

Na levé straně se nachází nekonečná geometrická řada s kvocientem $q=2^{x} \left(2^{x}>0 pro ∀x\in R\right).$ Aby byla konvergentní, musí být

$$2^{x}<1 \rightarrow 2^{x}<2^{0} \rightarrow x<0.$$

Její součet potom je

$$s=\frac{a\_{1}}{1-q}=\frac{2^{x}}{1-2^{x}}.$$

Danou rovnici jsme tedy převedli na tvar

$$\frac{2^{x}}{1-2^{x}}=1$$

a dále

$$2^{x}=1-2^{x}$$

$$2·2^{x}=1$$

$$2^{x+1}=2^{0}$$

$$x=-1.$$

*Nalezený kořen vyhovuje podmínce* $x<0.$

**Příklad 4**

Racionální čísla vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla:

1. $0,\overline{72}$ b) $1,3\overline{45}$

*Řešení*

1. Jedná se o racionální číslo dané ryze periodickým desetinným rozvojem, které můžeme přepsat na tvar

$$0,\overline{72}=\frac{72}{10^{2}}+\frac{72}{10^{4}}+…+\frac{72}{10^{n}}+….$$

To představuje konvergentní nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a\_{1}=\frac{72}{10^{2}}$ a s kvocientem $q=\frac{1}{10^{2}}$. Kvocient splňuje podmínku $\left|q\right|<1$ a pro součet této řady platí

$$0,\overline{72}=\frac{a\_{1}}{1-q}=\frac{72·10^{-2}}{1-10^{-2}}=\frac{72}{10^{2}-1}=\frac{72}{99}=\frac{8}{11}.$$

1. V tomto případě se jedná o racionální číslo s neryze periodickým desetinným rozvojem, ale obdobně jako v předchozí úloze můžeme napsat

$$1,3\overline{45}=\frac{13}{10}+\frac{45}{10^{3}}+\frac{45}{10^{5}}+\frac{45}{10^{7}}+…+\frac{45}{10^{2n+1}}+….$$

Počínaje druhým zlomkem se opět jedná o geometrickou řadu s prvním členem $a\_{1}=\frac{45}{10^{3}}$ a s kvocientem $q=\frac{1}{10^{2}}$, takže

$$1,3\overline{45}=\frac{13}{10}+\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{45}{10^{2n+1}}= \frac{13}{10}+\frac{a\_{1}}{1-q}$$

a tedy

$$1,3\overline{45}=\frac{13}{10}+\frac{45}{990}=1+\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{22}\right)=1\frac{19}{55}=\frac{74}{55}.$$

**Příklad 5**

Je daný čtverec o straně *a*. Do něho je vepsaný čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce. Takto vzniklému čtverci vepíšeme čtverec s vrcholy ve středech jeho stran atd. Postup stále opakujeme. Určete součet

1. obvodů,
2. obsahů

takto vzniklých čtverců.

*Řešení*

Strany čtverce tvoří geometrickou posloupnost, stejně tak geometrickou posloupnost tvoří součty obvodů čtverce a součty obsahů čtverce. Platí:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Strana | Obvod | Obsah |
| $$a\_{1}=a$$ | $$4a$$ | $$a^{2}$$ |
| $$a\_{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$ | $$2a\sqrt{2}$$ | $$\frac{a^{2}}{2}$$ |
| $$a\_{3}=\frac{a}{2}$$ | $$2a$$ | $$\frac{a^{2}}{4}$$ |
| $$a\_{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$$ | $$a\sqrt{2}$$ | $$\frac{a^{2}}{8}$$ |
| … | … | … |

1. Proto pro součet obvodů platí:

$4a+2a\sqrt{2}+2a+a\sqrt{2}+…=a·(4+2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+…)$.

V závorce se jedná o součet nekonečné geometrické řady s prvním členem 4 a kvocientem $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Takže

$$s=a·\frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=a·\frac{8}{2-\sqrt{2}}=4a·\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Součet obvodů takto vzniklých čtverců je $4a·\left(2+\sqrt{2}\right)$.

1. Pro součet obsahů platí:

$$a^{2}+\frac{a^{2}}{2}+\frac{a^{2}}{4}+\frac{a^{2}}{8}+…=a^{2}·\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+…\right).$$

V závorce se opět jedná o součet nekonečné geometrické řady s prvním členem tentokrát 1 a kvocientem $\frac{1}{2}$.

Takže

$$s= a^{2}·\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2a^{2}.$$

Součet obsahů takto vzniklých čtverců je $2a^{2}.$

**Úlohy k procvičení**

1. Vypočítejte součet $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+…$

$$\left[4\right]$$

1. Určete součet řady $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+…$

$$\left[\frac{3}{2}\right]$$

1. Řešte v množině reálných čísel rovnici

$\left(x-2\right)+\left(x-2\right)^{2}+\left(x-2\right)^{3}+…=1$.

$$\left[x=\frac{5}{2}\right]$$

1. Racionální čísla vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla:
2. $0,\overline{37}$
3. $3,1\overline{7}$

$$\left[a) \frac{37}{99};b) \frac{143}{45}\right]$$

1. Spirála se skládá z polokružnic, z nichž první má poloměr 10 cm a každá následující polokružnice má poloměr rovný dvěma třetinám poloměru předcházející polokružnice. Určete délku spirály.

$$\left[30 π cm\right]$$

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.