

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština7. prosince 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a úlohy k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem geometrické posloupnosti a umí jej aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Příklad 1**

Určete všechny geometrické posloupnosti, u nichž je součet prvního a čtvrtého členu 18 a součet druhého a třetího členu je 12. Dále vypočítejte součet první 6 členů takové posloupnosti.

*Řešení*

 Pro hledané geometrické posloupnosti platí

 Přitom ale víme, že kde *q* je kvocient geometrické posloupnosti. Dosadíme tedy do předchozích rovnic a získáme tak soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé, tj.

 Dělíme-li nyní první získanou rovnici rovnicí druhou, dostáváme

 a po úpravě máme kvadratickou rovnici

 Jejím řešením jsou dva reálné různé kořeny Tomu odpovídají první členy

 Daným podmínkám vyhovují právě dvě geometrické posloupnosti , jejichž kvocienty a první členy jsou

Dále máme určit součet prvních šesti členů nalezených posloupností. Obecně platí

a pro naše dvě řešení vychází

**Příklad 2**

Poločas přeměny rádia typu C je přibližně 20 minut. Kolik materiálu zbude bez přeměny z 1 g vzorku po 6 hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně u poloviny jader atomů látky.)

*Řešení*

 Po 20 minutách zbude z původního množství polovina, která se nepřeměnila. Za dalších 20 minut zbude z předchozího množství jedna polovina, celkem tedy polovina poloviny. Tak bychom mohli pokračovat dále, ale je zřejmé, že množství nepřeměněné látky tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem a kvocientem Za šest hodin proběhne celkem 18 přeměn a ze vztahu

vyplývá

 Po šesti hodinách zbude přibližně z původního množství materiálu.

**Příklad 3**

Nákupní cena automobilu byla 400 000 Kč. Každý měsíc se jeho hodnota sníží o 2,16% ceny automobilu z předchozího měsíce (*amortizace*). Jaká bude cena automobilu po 4 letech?

*Řešení*

 Cena automobilu na konci jednotlivých měsíců tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem , kde *p* je odepisované procento, a s prvním členem Zůstatková hodnota automobilu po 4 letech (tj. 48 měsících) používání potom vychází na začátku 49. měsíce

**Příklad 4**

 Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí

*Řešení*

 K řešení této úlohy můžeme použít dva způsoby.

1. *způsob*

Nejprve vypočítáme *a2* a *a3* jako řešení soustavy rovnic a potom určíme pomocí vztahů platících v geometrické posloupnosti první člen a kvocient. Tedy

 (1)

. (2)

Z rovnice (2) je

a dosazením do rovnice (1) získáváme

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení a to

Tomu odpovídají dvě řešení pro *a2* a to

Nyní použijeme vztah a pro vypočtená *a2, a3* dostáváme

Vydělíme-li druhou rovnici první rovnicí, vypočítáme

Obdobně jako v případě a) vypočítáme

1. *Způsob*

Určíme si a dosadíme do zadaných rovnic. Takže

 (1)

 (2)

Z rovnice (2) vyjádříme

 (3)

a dosadíme do rovnice (1)

Potom dosazením do rovnice (3) získáme dvě řešení:

1. b)

**Příklad 5**

 Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 6% své intenzity. Kolik desek je potřeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na jednu třetinu původní hodnoty?

*Řešení*

Označme původní intenzitu světla *I*. Intenzitu světla po průchodu skleněnou deskou můžeme vyjádřit následovně:

Po průchodu 1. deskou

Po průchodu 2. deskou

Po průchodu 3. deskou

Po průchodu n-tou deskou

Po průchodu n-tou deskou má být intenzita světla snížená alespoň na jednu třetinu původní hodnoty:

Tím jsme sestavili nerovnici o neznámé *n*. Můžeme ji vydělit *I*, protože se jedná o intenzitu světla a platí tedy Tedy:

Aby se intenzita světla snížila alespoň na jednu třetinu původní hodnoty, je potřeba, aby prošlo minimálně 18ti deskami.

**Úlohy k procvičení**

1. Určete všechny geometrické posloupnosti , pro které platí:
2. Určete všechny geometrické posloupnosti , pro které platí:

a vypočítejte součet prvních deseti členů.

1. Bakterie se množí dělením tak, že k tomuto jejich dělení dochází za příznivých podmínek vždy jednou za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne z jedné bakterie za 10 hodin?
2. Určete, před kolika lety byly vytvořené nástěnné malby, zjistili-li jsme, že organické zbytky obsahovaly 0,153krát menší koncentraci radiouhlíku ve srovnání s jeho koncentrací v živých organismech. Poločas přeměny radiouhlíku je 5 730 roků.
3. Přičteme-li k číslům 3, 10, 24 totéž číslo, vzniknou první tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tato čísla.
4. Čísla, jimiž jsou v centimetrech vyjádřené délky hran kvádru, tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Kvádr má objem . Součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu kvádru je Určete délky hran kvádru.

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.