

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNĚNCI**

**(iracionální rovnice)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština13. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá řešení rovnic s neznámou v odmocněnci a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Rovnice s neznámou pod odmocninou**

**Příklad 1**

 Řešte rovnici $\sqrt{3x-5}=4$.

*Řešení:*

1. způsob

$\sqrt{3x-5}=4$ / 2

$$3x-5=16$$

$$3x=21$$

$$x=7$$

Jediným možným kořenem dané rovnice je číslo 7. Protože jsme ale prováděli neekvivalentní (důsledkovou) úpravu, je nutnou součástí řešení zkouška. Proto

L(7) = $\sqrt{3.7-5}= \sqrt{21-5}=\sqrt{16}=4, P\left(7\right)=4, L\left(7\right)=P(7)$

Zkouška prokázala, že číslo 7 je opravdu řešením dané rovnice.

1. způsob

Odmocnina na levé straně je definovaná pouze tehdy, když $3x-5\geq 0$, tj. pro $x\in \left⟨\frac{5}{3}; +\infty )\right.$. Rovnici tedy řešíme v tomto intervalu. Pro každé číslo *x* z tohoto intervalu jsou obě strany rovnice nezáporné a jejich umocnění je v intervalu $\left⟨\frac{5}{3}; +\infty )\right.$ ekvivalentní úprava. Stejně jako v 1. způsobu řešení vypočítáme *x* = 7. A protože $7\in \left⟨\frac{5}{3}; +\infty )\right.$, je číslo 7 kořenem dané rovnice. Po předchozích úvahách zkoušku provádět nemusíme.

**Příklad 2**

Řešte rovnici $\sqrt{7-x}=x-1$.

*Řešení:*

1. způsob

$\sqrt{7-x}=x-1$ / 2

$$7-x= x^{2}-2x+1$$

$$x^{2}-x-6=0$$

$$x\_{1}= -2; x\_{2}=3$$

 Opět jsme prováděli neekvivalentní úpravu a proto je zkouška nutnou součástí řešení.

 $L\left(-2\right)= \sqrt{7-(-2)}= \sqrt{9}=3 P\left(-2\right)= -2-1= -3 L(-2)\ne P(-2)$

$$L\left(3\right)= \sqrt{7-3}=\sqrt{4}=2 P\left(3\right)=3-1=2 L\left(3\right)=P(3)$$

 Jediným kořenem dané rovnice je číslo $x\_{2}=3$.

1. způsob

Musíme stanovit podmínky řešitelnosti. Pro levou stranu rovnice je to interval $(-\infty ;\left.7\right⟩$ (ve kterém platí, že $7-x\geq 0$). Pro pravou stranu rovnice je to interval $\left⟨1; +\infty )\right.$ (zde je $x-1\geq 0$). Protože obě podmínky musí platit současně, je jejich průnikem interval $\left〈1;7\right〉$. Pro všechna $x\in \left〈1;7\right〉$ jsou obě strany nezáporné, umocnění na druhou je ekvivalentní úpravou. Z vypočtených kořenů $x\_{1}= -2, $

$x\_{2}=3$ patří do tohoto intervalu jen druhý a daná rovnice má jediné řešení $x\_{2}=3$.

**Příklad 3**

 Řešte rovnici $\sqrt{2x-3}+ \sqrt{4x+1}=4.$

*Řešení:*

 Omezíme se nyní na 1. způsob řešení, zkouška je nedílnou součástí řešení.

$\sqrt{2x-3}+ \sqrt{4x+1}=4$ / 2

$$2x-3+2.\sqrt{\left(2x-3\right).\left(4x+1\right)}+4x+1=16$$

$2.\sqrt{8x^{2}-10x-3}=-6x+18$ / 2

$$4.\left(8x^{2}-10x-3\right)=36x^{2}-216x+324$$

$$32x^{2}-40x-12=36x^{2}-216x+324$$

$$4x^{2}-176x+336=0$$

$$x^{2}-44x+84=0$$

$$x\_{1,2}=\frac{44\pm \sqrt{44^{2}-4.84}}{2}=\frac{44\pm 40}{2}$$

$$x\_{1}=2; x\_{2}=42$$

 Zkouškou zjistíme, že řešením je pouze číslo 2.

**Příklad 4**

 Řešte rovnici $\sqrt{z^{2}+3}=2.$

*Řešení:*

Výraz $z^{2}+3$ je nezáporný pro všechna reálná čísla *z,* číslo 2 je také nezáporné, umocnění je tentokrát ekvivalentní úprava.

$\sqrt{z^{2}+3}=2$ / 2

$$z^{2}+3=4$$

$$z^{2}-1=0$$

$$\left(z-1\right).\left(z+1\right)=0$$

$$z\_{1}=1; z\_{2}=-1.$$

**Úlohy k procvičení**

V množině ***R*** řešte následující rovnice

1. $\sqrt{2x-1}=5$ [13]
2. $\sqrt{2-3x}=-2$ [$∅$]
3. $\sqrt{6-x}=2$ [2]
4. $\sqrt{12-x}=x$ [3]
5. $x-\sqrt{x+1}=5$ [8]
6. $2\sqrt{x+5}=x+2$ [4]
7. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$ [4]
8. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$ [2; 34]
9. $\sqrt{x-9}=7-\sqrt{x-16}$ [25]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.