

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**VARIACE A PERMUTACE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk**  **Datum vytvoření** | čeština |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá variace a permutace a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Variace a permutace**

**Skupiny bez opakování**

**Příklad 1**

Kolik různých přirozených trojciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5? Kolik z nich je dělitelných dvěma? Kolik z nich je lichých?

*Řešení:*

Na pořadí cifer v čísle záleží, nevybíráme všechny cifry a cifry se v čísle nemohou opakovat – jedná se o variace bez opakování.

1. Dvěma jsou dělitelná ta, která na místě jednotek mají cifry 2 nebo 4. Proto tyto cifry „zafixujeme“ na místě jednotek a na další dvě místa vybíráme dvě cifry ze čtyř.

Tedy

1. Lichá jsou ta čísla, u kterých se na místě jednotek objevuje cifra 1, 3 nebo 5 – „zafixujeme“ je a na další dvě místa vybíráme dvě cifry ze čtyř.

Takže

**Příklad 2**

Zmenší-li se počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.

*Řešení:*

Text úlohy přepíšeme do rovnice

Definiční obor této rovnice je **.**

Řešením rovnice jsou tedy čísla 40 a 21. 21 však nevyhovuje zadání úlohy, resp. definičnímu oboru rovnice a tak řešením úlohy je pouze číslo 40.

**Příklad 3**

Na sportovním kurzu vybíráme do závodu čtyřčlenné hlídky, v nichž má každý závodník svoji funkci – velitel, zdravotník, pokladník a kurýr. Kolika způsoby lze z 15 chlapců a 18 dívek sestavit takové hlídky, jestliže:

1. pro volbu hlídky neplatí žádná omezující pravidla
2. velitel hlídky musí být dívka
3. kurýr musí být chlapec
4. v hlídce mohou být nejvýše dvě dívky.

*Řešení:*

1. Pokud pro sestavení hlídky neplatí žádná omezující pravidla, pak vytváříme čtveřice, v nichž záleží na pořadí členů (každý plní jinou funkci), z 33 účastníků kurzu. Proto

nebo

1. Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že velitel hlídky je dívka. Takovou hlídku lze sestavit způsoby.
2. Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že kurýr musí být chlapec. Takovou hlídku lze sestavit způsoby.
3. Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že v hlídce mohou být nejvýše dvě dívky. To znamená buď žádná, jedna nebo dvě.

* žádná dívka způsobů
* jedna dívka způsobů
* dvě dívky způsobů

Protože je splněné kombinatorické pravidlo součtu (každé dvě množiny hlídek jsou navzájem disjunktní), je výsledný počet možností pro sestavení hlídky způsobů.

**Příklad 4**

Kolik různých osmiciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 8?

*Řešení:*

Na pořadí cifer v čísle záleží, vybíráme všechny cifry a žádná se nemůže opakovat. Proto pro počet čísel platí: **.**

**Příklad 5**

Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?

*Řešení:*

Opět záleží na pořadí karet při míchání, vybíráme všechny karty a žádná karta se neopakuje. Proto pro počet míchání platí:

**.**

**Příklad 6**

Kolika způsoby můžeme usadit dva chlapce a tři dívky na jednu lavičku,

1. jestliže pro jejich usazení neplatí žádné podmínky,
2. jestliže sedí vedle sebe oba chlapci a vedle nich všechny dívky?

*Řešení:*

1. Pokud pro usazení neplatí žádné omezující podmínky, pak je můžeme usadit způsoby.
2. Dva chlapce vedle sebe můžeme usadit dvěma způsoby, tři dívky vedle nich posadíme způsoby, dohromady tedy způsoby. Chlapci ale mohou sedět vpravo nebo vlevo od dívek a proto je počet pro usazení možností.

**Úlohy k procvičení**

1. Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4 , 6, 9, a to každá nejvýše jednou.

1. Z kolika prvků lze sestavit 992 variací druhé třídy bez opakování?
2. Na sportovním kurzu vybíráme do závodu tříčlenná družstva, v nichž má každý závodník svoji funkci – velitel, zdravotník a kurýr. Kolika způsoby lze z 10 chlapců a 13 dívek sestavit takové družstvo, jestliže:
3. pro volbu družstva neplatí žádná omezující pravidla
4. velitel družstva musí být chlapec
5. zdravotník musí být dívka
6. v družstvu mohou být nejvýše dva chlapci.
7. Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do řady při nástupu na tělocvik?
8. Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 5 různých českých knih a 3 různé francouzské knihy tak, že všechny české budou vedle sebe a všechny francouzské budou vedle sebe?

**Skupiny s opakováním**

**Příklad 1**

Určete, kolik různých sedmiciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 0,1,2,3,

1. má-li se v každém z nich opakovat číslice 0 třikrát, číslice 1 jednou, číslice 2 dvakrát a číslice 3 jednou
2. má-li se v každém z nich opakovat číslice 1 čtyřikrát, číslice 2 jedenkrát a na místě jednotek a desítek budou nuly.
3. Kolik číslic můžeme získat, zaměníme-li pořadí číslic v čísle 122 338?

*Řešení:*

1. Jedná se o permutace s opakováním. Vytváříme uspořádané sedmice (k= 7), ve kterých je k1= 3, k2= 1, k3= 2 a k4= 1. Hledaný počet čísel určíme

***P´***(3, 1, 2, 1) =

1. Opět se jedná o permutace s opakováním, vytváříme uspořádané sedmice. Nyní si však na místě jednotek a desítek „zafixujeme“ číslice 0 a budeme hledat uspořádané pětice, ve kterých se vyskytuje číslice 1 čtyřikrát a číslice 2 jedenkrát. Proto

***P´***(4, 1) =

1. Opět se jedná o permutace s opakováním, nyní vytváříme uspořádané šestice (k=6), ve kterých je k1=1, k2=2, k3=2 a k4=1. Hledaný počet čísel určíme

***P´***(1, 2, 2, 1) =

**Příklad 2**

Kolik různých telefonních stanic lze napojit na tel. ústřednu, jestliže jsou všechna čísla stanic šesticiferná a na 1. místě může být i 0? Jak se změní výsledek, jestliže se na 1. místě 0 nepřipouští? Jak se změní výsledek, budou-li telefonní čísla sedmimístná a na 1. místě 0 nepřipouštíme?

*Řešení:*

1. V tomto případě se jedná o variace s opakováním. Vytváříme uspořádané šestice z 10 prvků (k dispozici máme 10 číslic) a číslice se mohou v čísle opakovat. Protože připouštíme na 1. místě číslici 0, je hledaný počet

***V´***(6, 10) = 106 = **1 000 000** (připouštíme tím také telefonní číslo 000 000)

1. Nyní se také jedná o variace s opakováním, ale na 1. místě můžeme „vystřídat“ jen 9 číslic – číslici 0 zde nepřipouštíme. Dále vytváříme uspořádané pětice. Proto

9·***V´***(5, 10)= 9·105 = **900 000**

1. Jde o podobnou úlohu, jako byl případ b), jen s tím rozdílem, že telefonní čísla jsou sedmimístná. Proto

9·***V´***(6, 10)= 9·106 = **9 000 000**

**Úlohy k procvičení**

1. Určete, kolik různých slov (bez ohledu na jejich význam), lze sestavit z písmen slova ABRAKADABRA, jestliže
2. jsou použita všechna
3. písmeno K bude na konci slova
4. všechna A nesmí být vedle sebe.
5. Určete, kolik je všech možných SPZ aut, které se skládají ze tří písmen abecedy A – Z, za nimiž následují čtyři číslice 0 – 9? Jak se změní počet SPZ, zvýší-li se počet písmen na 4 a počet číslic klesne na 3? Kolik SPZ můžeme sestavit jen z 6 číslic a žádných písmen? (počítejte s tím, že písmen abecedy je 22).

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CALDA, Emil a DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.