

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Ondřej Chudoba |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 10. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16–19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák umí použít znalosti shodných zobrazení k řešení úloh  |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Řešené příklady:**

**1) Do čtverce *ABCD* vepište rovnostranný trojúhelník *AYZ* tak, aby** $Y \in BC, Z\in CD$**.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha je vyřešena (viz obr. 1).



obr. 1

Bod *Z* je osově souměrný s bodem *Y* v osové souměrnosti s osou *AC*. Z této úvahy vyplývá postup konstrukce.

Popis konstrukce.

1, $∡CAK; \left|∡CAK\right|=30°$

2, $Z;Z= ⟼AK∩DC$

3, $o, o=AC$

4, $Y;O\left(o\right):Z ⟶Y$

5, $AZY$

Konstrukce.



obr. 2

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

**2) Je dána úsečka *AA*1 (|*AA*1| = 5 cm). Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které je *AA*1 těžnicí *ta* a pro které platí *c* = 4 cm, *b* = 7 cm.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 3).



obr. 3

Trojúhelník *ABC* doplníme na rovnoběžník *ABCD*, ve kterém známe délky stran trojúhelníka *ABD*. Bod *A*1 je potom středem strany *AD*. Bod *C* je potom obrazem bodu *B* ve středové souměrnosti podle bodu *A*1. Z těchto úvah vyplývají hlavní body postupu konstrukce:

1, $trojúhelník ABD podle věty sss$

2, $rovnoběžník ABCD$

3, $C, S\left(A\_{1}\right):B \rightarrow C\_{ }$, kde *A*1 je střed *AD*

Popis konstrukce.

1, $AB; \left|AB\right|=4 cm$

2, $k\_{1};k\_{1}\left(A,10 cm\right)$

3, $k\_{2};k\_{2}\left(B,7 cm\right)$

4, $D;D=k\_{1}∩k\_{2}$

5, $A\_{1};A\_{1} je střed AD$

6, $C;S\left(A\_{1}\right):B⟶C$

7, $△ABC$

Konstrukce.

obr. 4

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

**3) Sestrojte lichoběžník *ABCD (AB || CD)*, je-li dáno *a* = 6,5 cm, *b* = 4 cm, *c* = 3 cm, *d* = 3 cm.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 5).

obr. 5

V translaci o vektor ***CD*** se bod *B* zobrazí do bodu *B’*. Bod *C* se zobrazí do bodu *D*. Vznikne tak trojúhelník *AB’D*, v němž známe délky všech stran. Nejprve tedy narýsujeme trojúhelník AB’D (podle věty sss). Z těchto úvah vyplývají hlavní body postupu konstrukce:

1, $AB^{'}D \left(sss\right)$

2, $C;T\left(B^{'}B\right):D⟶C$

Popis konstrukce.

1, $AB^{'};\left|AB^{'}\right|=3,5 cm$

2, $k\_{1};k\_{1}\left(B',4 cm\right)$

3, $k\_{2};k\_{2}\left(A,3 cm\right)$

4, $D;D=k\_{1}∩k\_{2}$

5, $B;\left|AB\right|=6,5 cm, B^{'}\in AB$

6, $C;T\left(B^{'}B\right):D⟶C$

7, lichoběžník $ABCD$

Konstrukce.

obr. 6

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

**4) Ve kterém otočení je samodružný rovnostranný trojúhelník?**

*Řešení:*

Viz obr. 7, odtud je zřejmé, že zadání vyhovuje každé otočení ve tvaru $R(T,k⋅120°)$, kde $k\in Z$ a *T* je těžiště trojúhelníka.



obr. 7

**5) Jsou dány dvě kružnice *k*1, *k*2, které se protínají ve 2 bodech *M, C*. Sestrojte trojúhelník *ABC* tak, že** $A\in k\_{1}, B\in k\_{2}, C\in k\_{1}∩k\_{2}, \left|MA\right|=\left|MB\right|.$

*Řešení:*

Rozbor.

Ve středové souměrnosti se středem *M* přejde bod *A* do bodu *B*. $S\left(M\right):k\_{1}\rightarrow k\_{1}^{,}, B\in k\_{1}^{,} ∩ k\_{2}. $Bod *A* je potom obrazem bodu *B* ve středové souměrnosti podle středu *M*.



k1´

obr. 8

Popis konstrukce.

1, $k\_{1}^{,};S\left(M\right): k\_{1}^{ }\rightarrow k\_{1}^{,}^{ }$

2, $B;B=k\_{ }\_{1}^{,}∩k\_{2}$

3, $A\_{ }^{ };S\left(M\right): B\rightarrow ^{ }A$

4, trojúhelník $ABC$

Konstrukce.

k1´

obr. 9

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

**6) Marie musí od stanu *S* dojít k řece *r*, nabrat vodu a donést ji do umývárny *U*. Určete Marii cestu, tak aby byla co nejkratší. Viz obr. 10.**

****

obr. 10

*Řešení:*

Rozbor.

V osové souměrnosti s osou *r* přejde bod *U* do bodu *U´*. Průsečík *P* úsečky *SU´* a přímky *r* je potom místem, kde Marie nabere vodu. To proto, že čára *SPU* je nejkratší cestou dle zadání.

Popis konstrukce.

1, $U\_{ }^{,};O\left(r\right): U\_{ }^{ }\rightarrow U\_{ }^{,}^{ }$

2, $P;P=SU\_{ }^{,}∩r\_{ }$

3, *SPU* je potom hledaná cesta

****Konstrukce.

obr. 11

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

**7) Jsou dány kružnice *k* a přímka *p* mimo *k*, dále je dán bod *A*, který leží vně kružnice *k* a neleží na přímce *p*. Narýsujte rovnostranný trojúhelník *BAC* tak, aby vrchol *B* trojúhelníka ležel na přímce *p* a vrchol *C* na kružnici *k*.**

*Řešení:*

Rozbor.

V rotaci kolem bodu *A* o ±60° přejde bod *B* do bodu *C*, přímka *p* protne kružnici *k* v bodě *C*.

obr. 12

Popis konstrukce.

1, $R\_{ }^{ };R\left(A,\pm 60°\right): p\rightarrow p\_{ }^{,}^{ }$

2, $C;C=p\_{ }^{,}∩k\_{ }$

2, $AF;\left|∡CAF\right|=60°$

3, $B;B\in p ∩AF$

4, Trojúhelník BAC

Konstrukce

Úloha má 2 řešení, jelikož přímka p´ protne kružnici k ve dvou bodech. V obrázku je druhé řešení označeno číslem 2 v indexu. 

obr. 13

Diskuse.

Úloha má 2 řešení. Úloha může obecně mít 2–4 řešení v závislosti na vzájemné poloze zadaných útvarů.

**Úlohy k procvičení:**

1. Je dána uzavřená lomená čára *ABCDA*, které je hranicí čtverce *ABCD*. Ve kterých osových souměrnostech má daná lomená čára

a) právě dva samodružné body,

b) právě jeden samodružný bod,

c) samodružnou právě jednu úsečku, která tvoří stranu čtverce,

d) samodružné právě dvě úsečky, které tvoří strany čtverce?

[a) *O*(*AC*), *O*(*BD*), b) neexistuje, c) *O*(*AB*), *O*(*BC*), *O*(*CD*), *O*(*AD*), d) *O*(*p*), *O*(*q*), kde *p* je osa úsečky *AB* resp. *q* je osa úsečky *BC*]

1. Určete počet os, podle kterých je osově souměrný pravidelný *n*-úhelník.

[*n*]

1. Je dána přímka *p* a body *A*, *B* ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou *p*, přičemž *AB* není kolmá na *p*. Sestrojte na přímce *p* bod *V* tak, aby osa úhlu *AVB* ležela v přímce *p*.

[Návod: Sestrojíme obraz *A’* bodu *A* v osové souměrnosti s osou *p*. Přímka *BA’* protne přímku *p* v bodě *V*.]

1. Je dána úsečka *AA*1 *AA*1 = 4,5 cm. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*, v nichž *AA*1 je těžnicí *ta* a *tb* = 6 cm.

[Návod: Neznámé body *B*, *C* jsou krajní body úsečky, která má střed *A*1. Bod *C* leží na Thaletově kružnici s průměrem *AA*1. Bod *B* leží na kružnici $k(T,\frac{2}{3}t\_{b})$, kde *T* je těžiště trojúhelníka *ABC*.]

1. Sestrojte lichoběžník *ABCD*, jsou-li dány délky obou jeho základen *a, c* a obou jeho úhlopříček *e, f*.

[Návod: Posunutí *T(****DC***) zobrazí bod *D* do bodu *C*, bod *B* do bodu *B‘*, úsečku *BD* do úsečky *B’C’*. V trojúhelníku *AB’C’* jsou délky stran |*AB’*| = *a + c*, |*B’C*| = *f*, |*AC|* = *e*. Jsou-li splněny náležité trojúhelníkové nerovnosti, lze trojúhelník sestrojit. Body *B* a *D* jsou pak obrazy bodů *B’* a *C* v posunutí *T*-1(***DC***).]

1. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *a, b* a mimo ně bod *C*. Sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, aby jeho vrcholy *A, B* ležely po řadě na přímkách *a, b*.

[Návod: V rovnostranném trojúhelníku *ABC* má úhel při vrcholu *C* velikost 60°. V otočení, jehož středem je bod *C* a úhel otočení je ±60°, je obrazem bodu *A* bod *B*, obrazem přímky *a* přímka *a’*. Proto $B\in a'$. $B\in b$, tedy $B\in a^{'}∩b$.]

Autor souhlasí s bezplatným používáním tohoto materiálu pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá licenci Creative Commons, BY-NC-SA.

Autorem všech obrázků je Ondřej Chudoba. Autor souhlasí s jejich bezplatným používáním. Jakékoliv jejich další využití podléhá licenci Creative Commons, BY-NC-SA. Obrázky byly vytvořeny pomocí programu Geogebra (v. 4.0.19.0). Na požádání (chudoba/at/gvm/dot/cz) autor poskytne příslušné soubory typu .ggb.

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.