

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**KONSTRUKČNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ UŽITÍM MNOŽIN BODŮ**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Ondřej Chudoba |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 4. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16–19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák umí najít řešení úlohy nalezením množin bodů daných vlastností |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

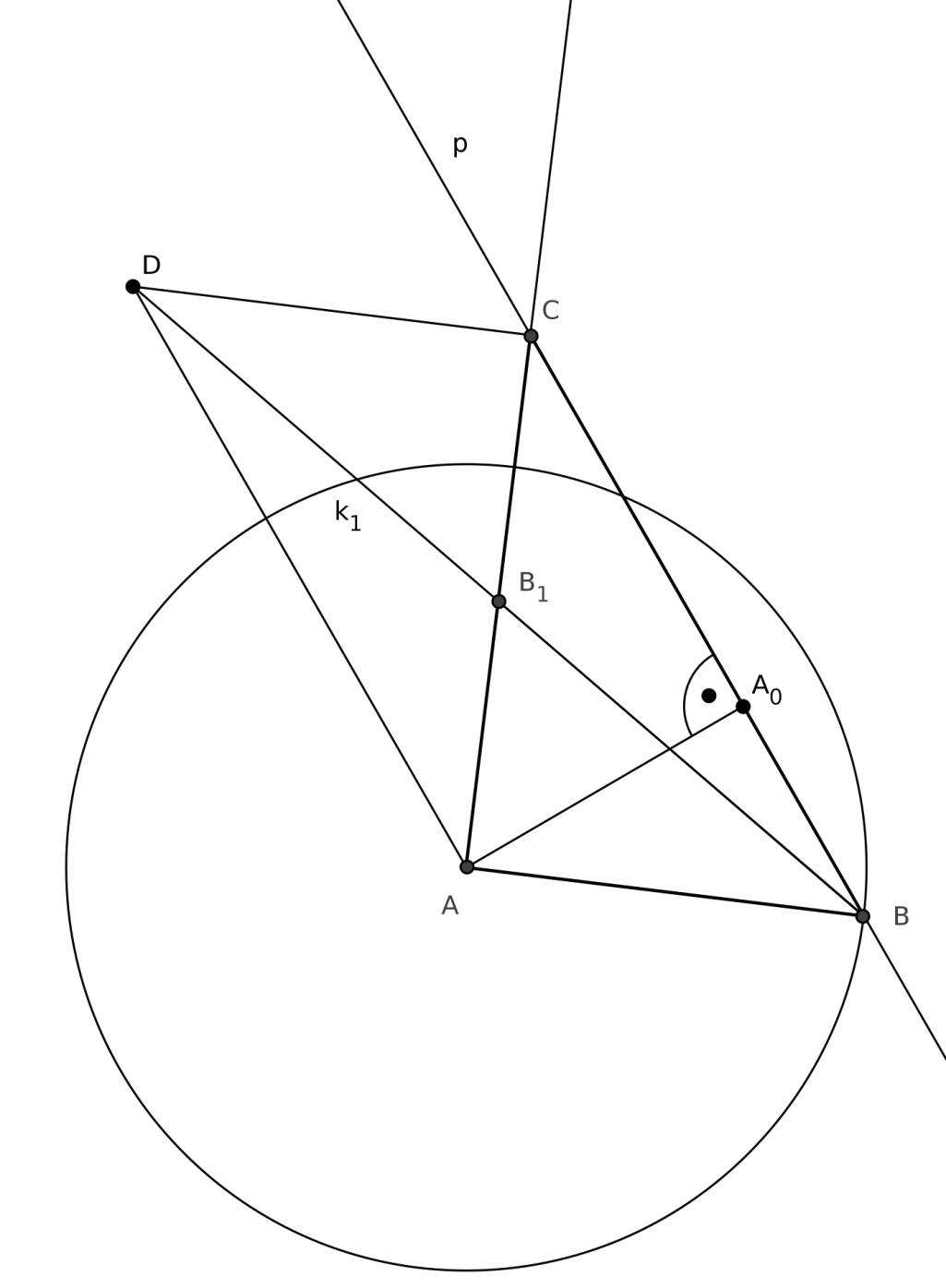
**Řešené příklady:**

**1) Je dána úsečka . Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí , *AA0* je výška na stranu *a*.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 1).



obr. 1

Bod *B* je od bodu *A* vzdálen 5 cm a leží na přímce, která je kolmá k úsečce *AA*0a prochází bodem *A*0. Je tedy společným bodem množin bodů splňujících dané podmínky. Dle označení v obr. 1 tedy Odtud plynou hlavní body konstrukce:

1,

2,

3,

4,

5,

6,

Popis konstrukce.

1,

2,

3,

4,

5,

6,

7,

8,

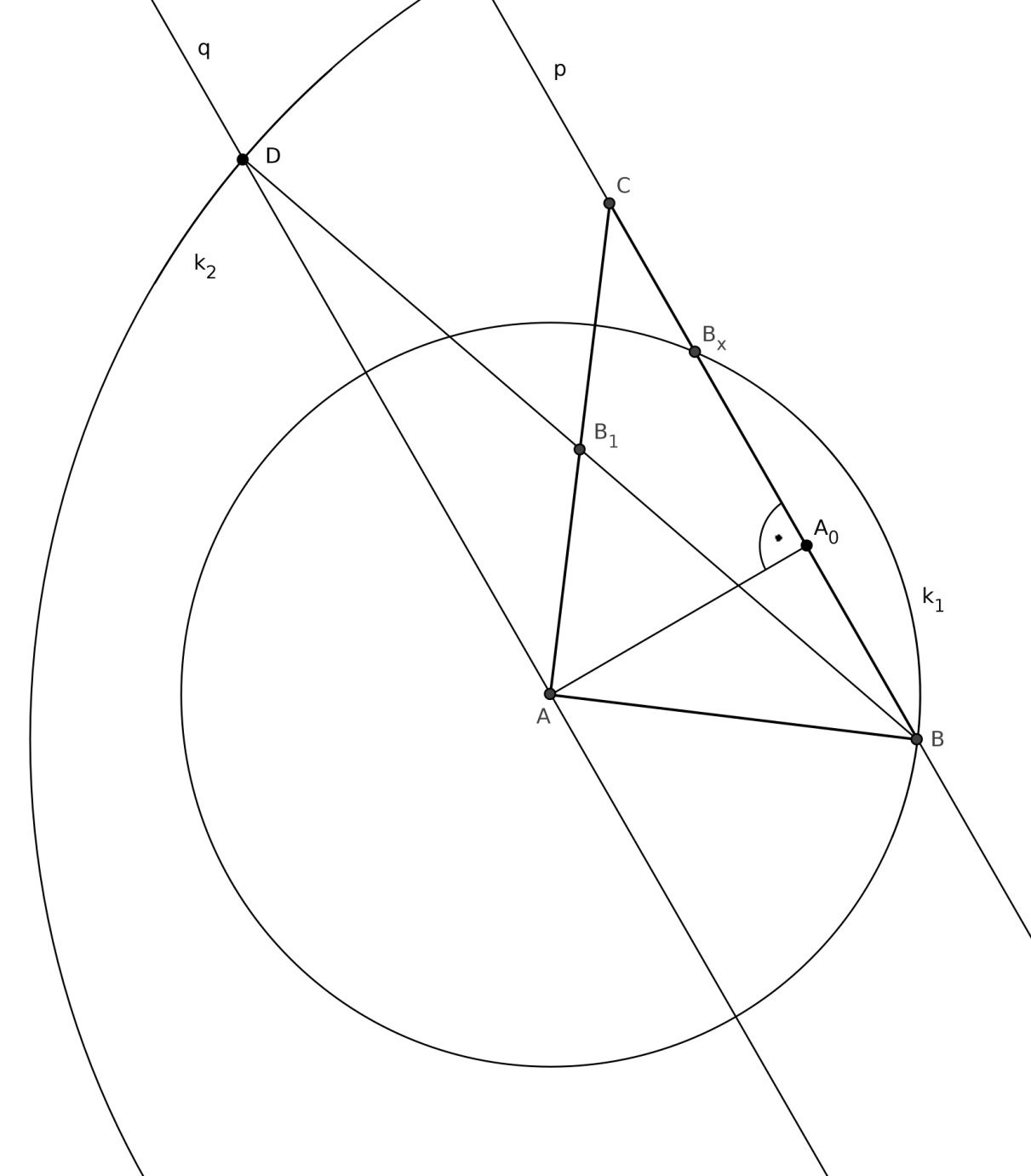
9,

10,

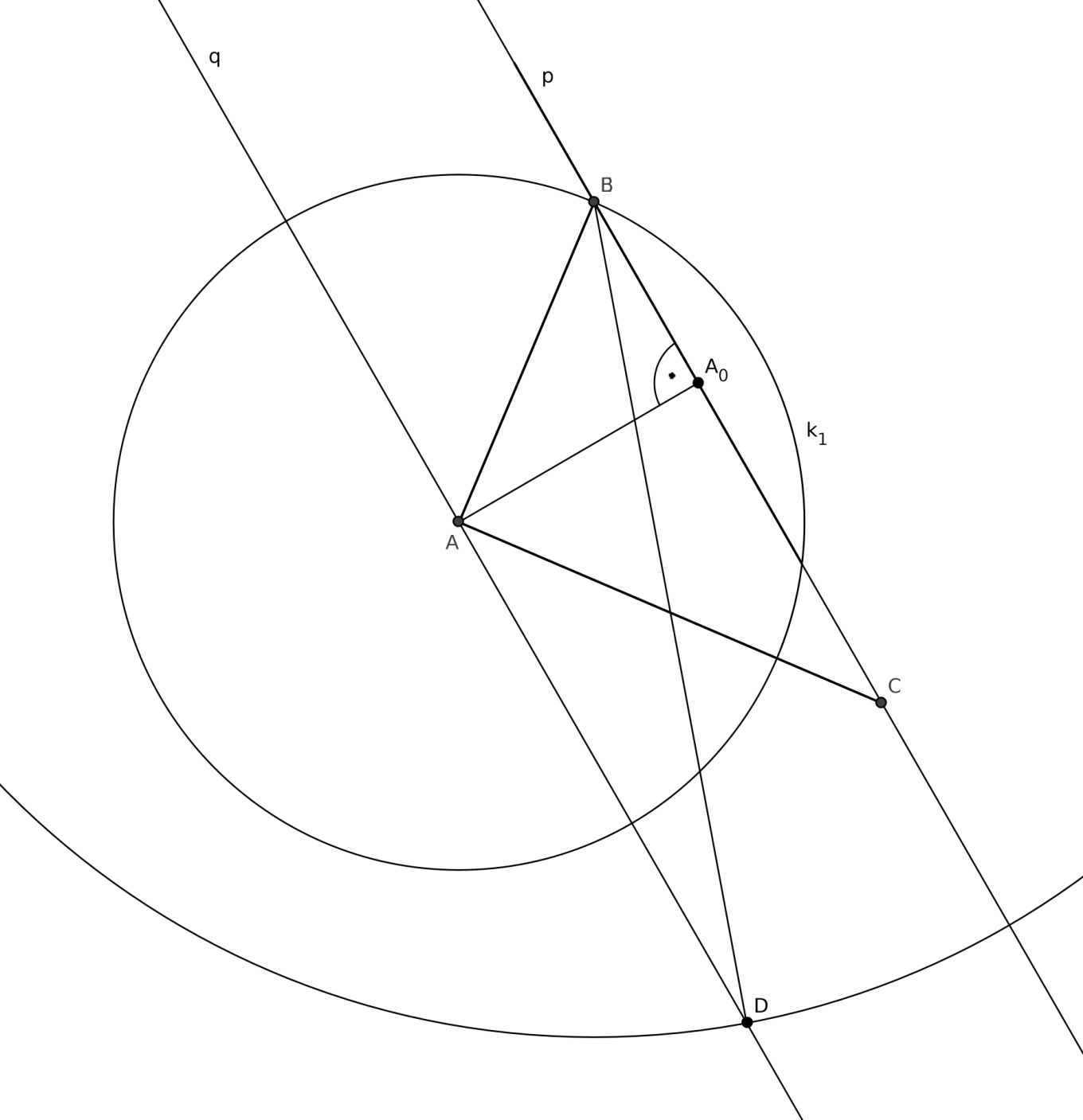
11,

Konstrukce.

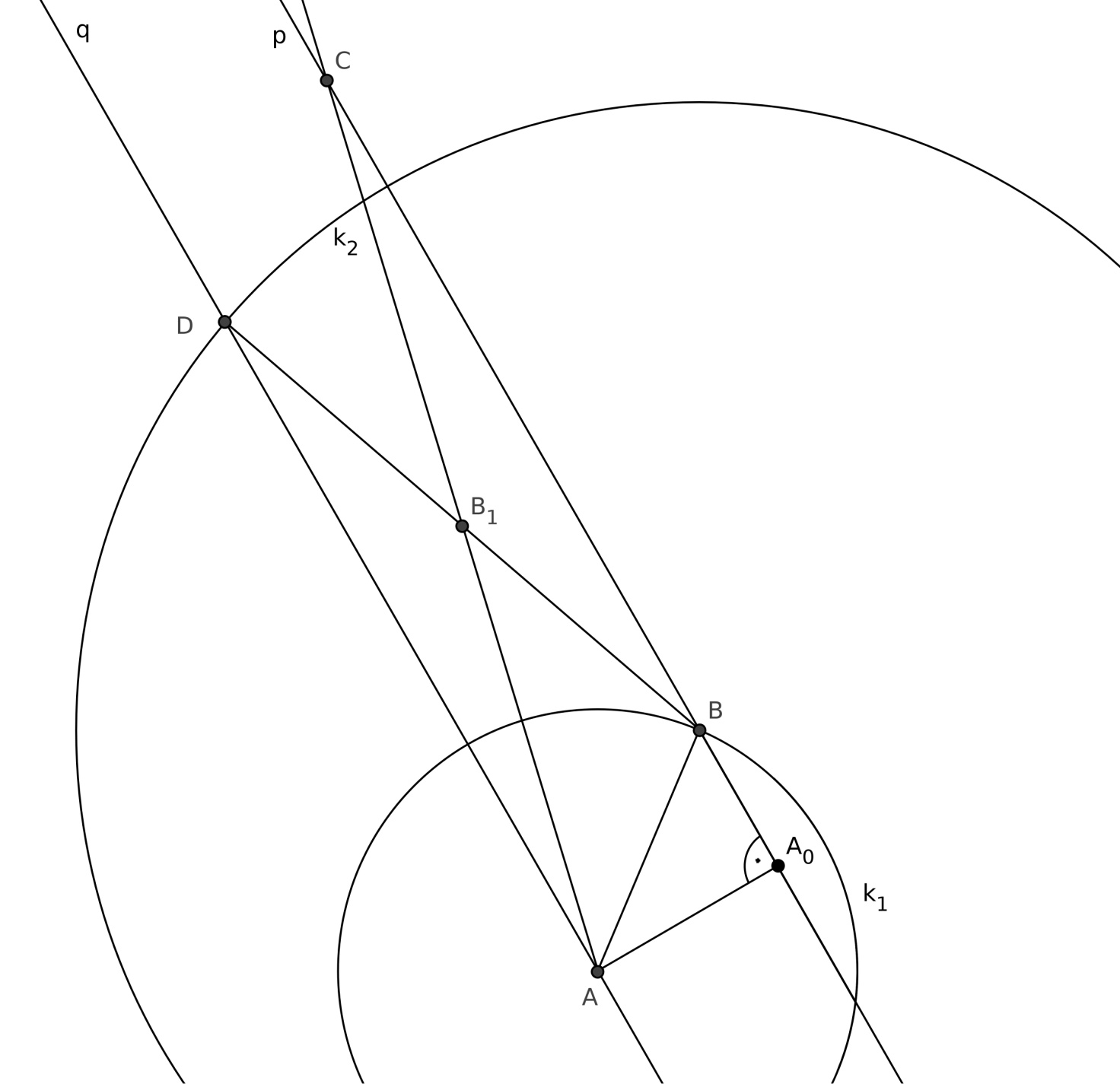
Při rýsování kružnice *k*1 obdržíme 2 průsečíky s přímkou *p* – tedy 2 body *B*. Z každého tohoto bodu *B* potom rýsujeme kružnici *k*2, která protne přímku *q* ve 2 bodech, což jsou 2 body *D*. Úloha má tedy 4 řešení. Obrázky jsou samostatně pro každou ze čtyř situací.



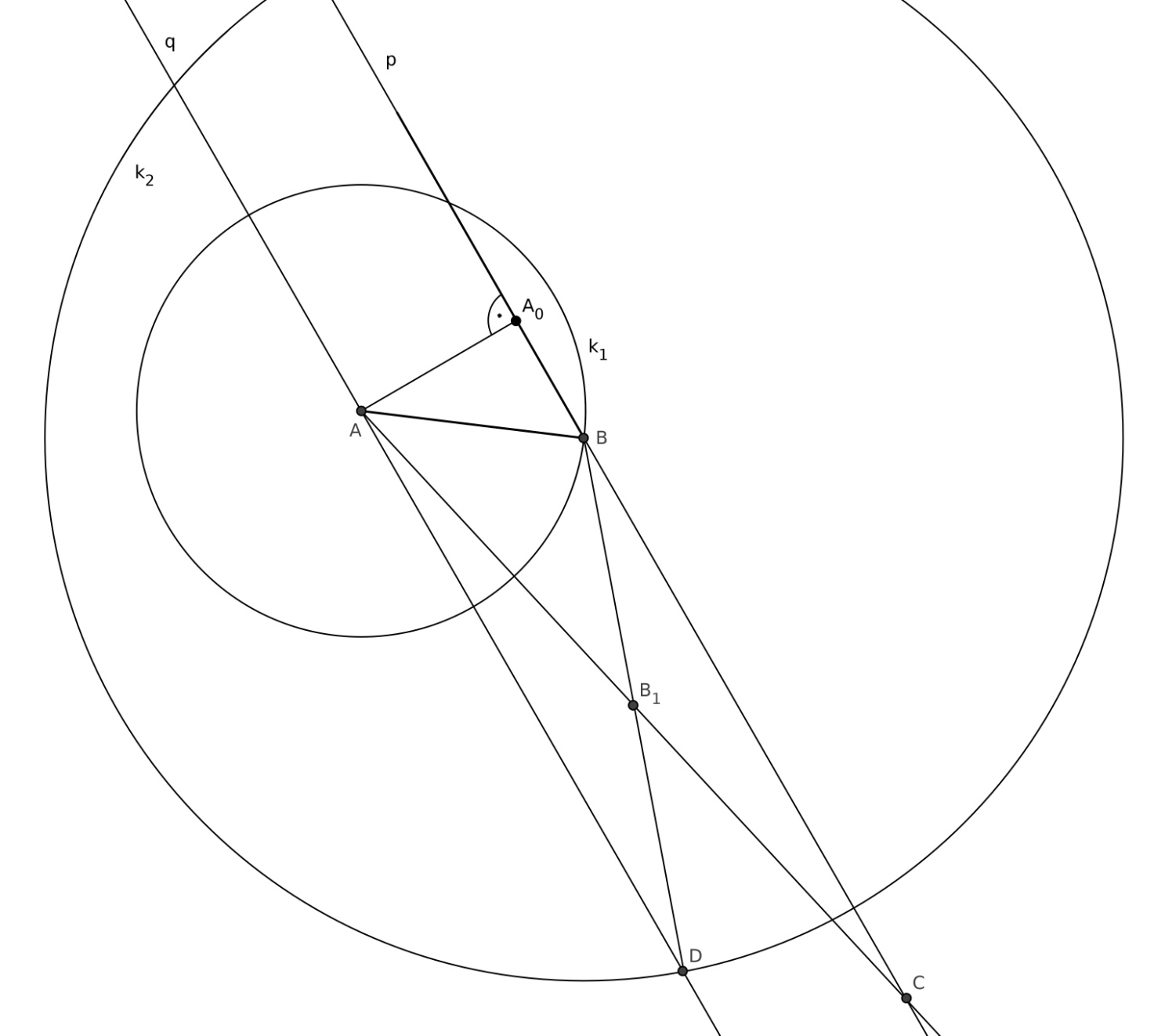
obr. 2a



obr. 2b



obr. 2c



obr. 2d

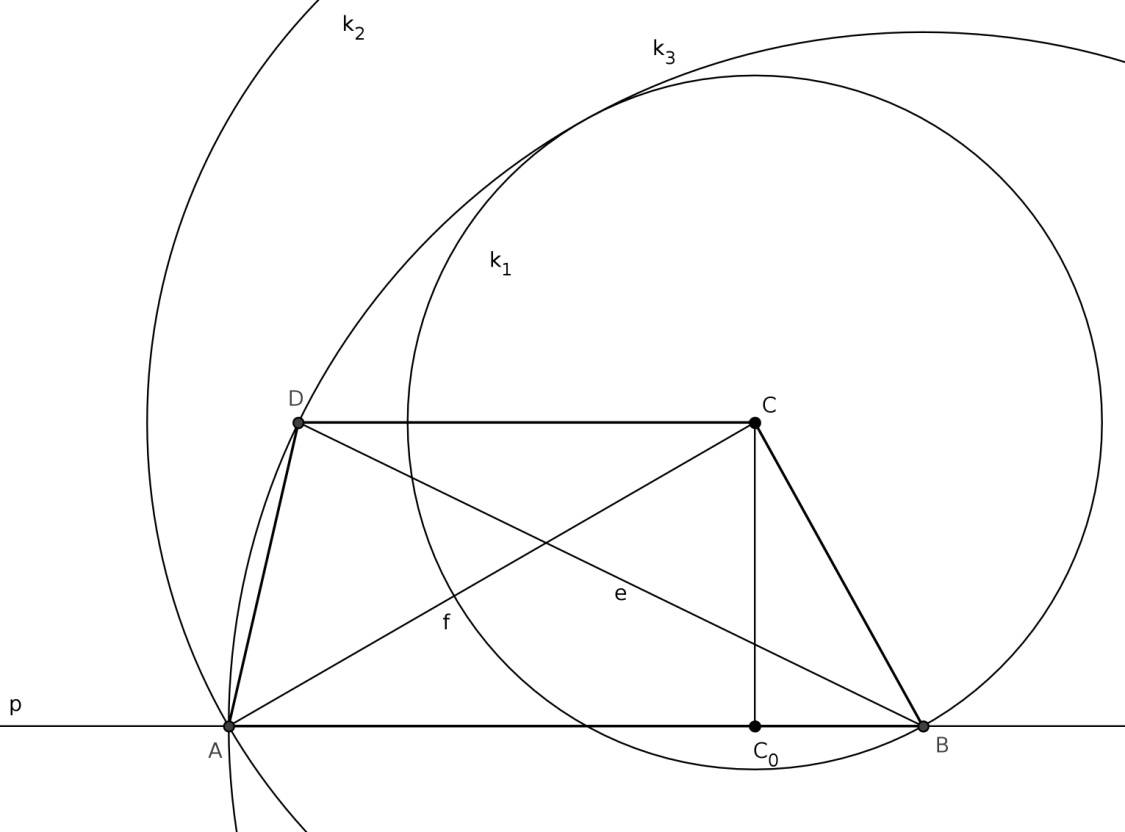
Diskuse.

Úloha má 4 řešení.

**2) Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB* || *CD*), pro který platí *b* = 4 cm, *v* = 3,5 cm, *e* = 8 cm, *f* = 7 cm. Nechť *e* značí úhlopříčku z bodu *B* a *f* úhlopříčku z bodu *A*.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 3).

obr. 3

Bod *B* je od bodu *C* vzdálen 4 cm a leží na přímce, která je kolmá k úsečce *CC*0 a prochází bodem *C*0. Dle označení v obr. 3 tedy platí Bod *A* je od bodu *C* vzdálen 7 cm a leží také na přímce *p*. Dle označení v obr. 3 tedy platí Bod *D* je od bodu *B* vzdálen 8 cm a leží na přímce, která je rovnoběžná s *p* a prochází bodem *C*. Dle označení v obr. 3 tedy platí Z těchto úvah vyplývá postup konstrukce.

Popis konstrukce.

1,

2,

3,

4,

5,

6,

7,

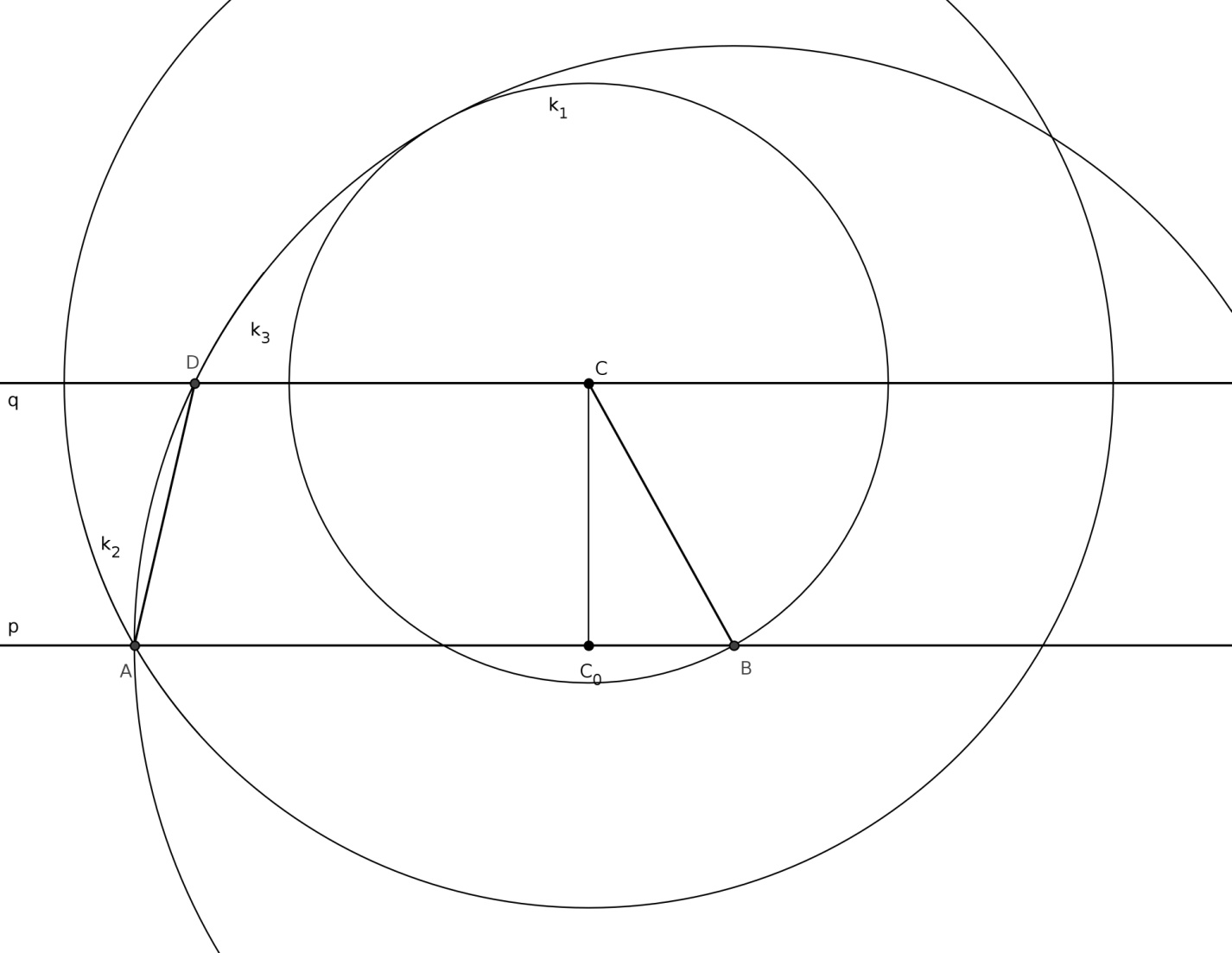
8,

9,

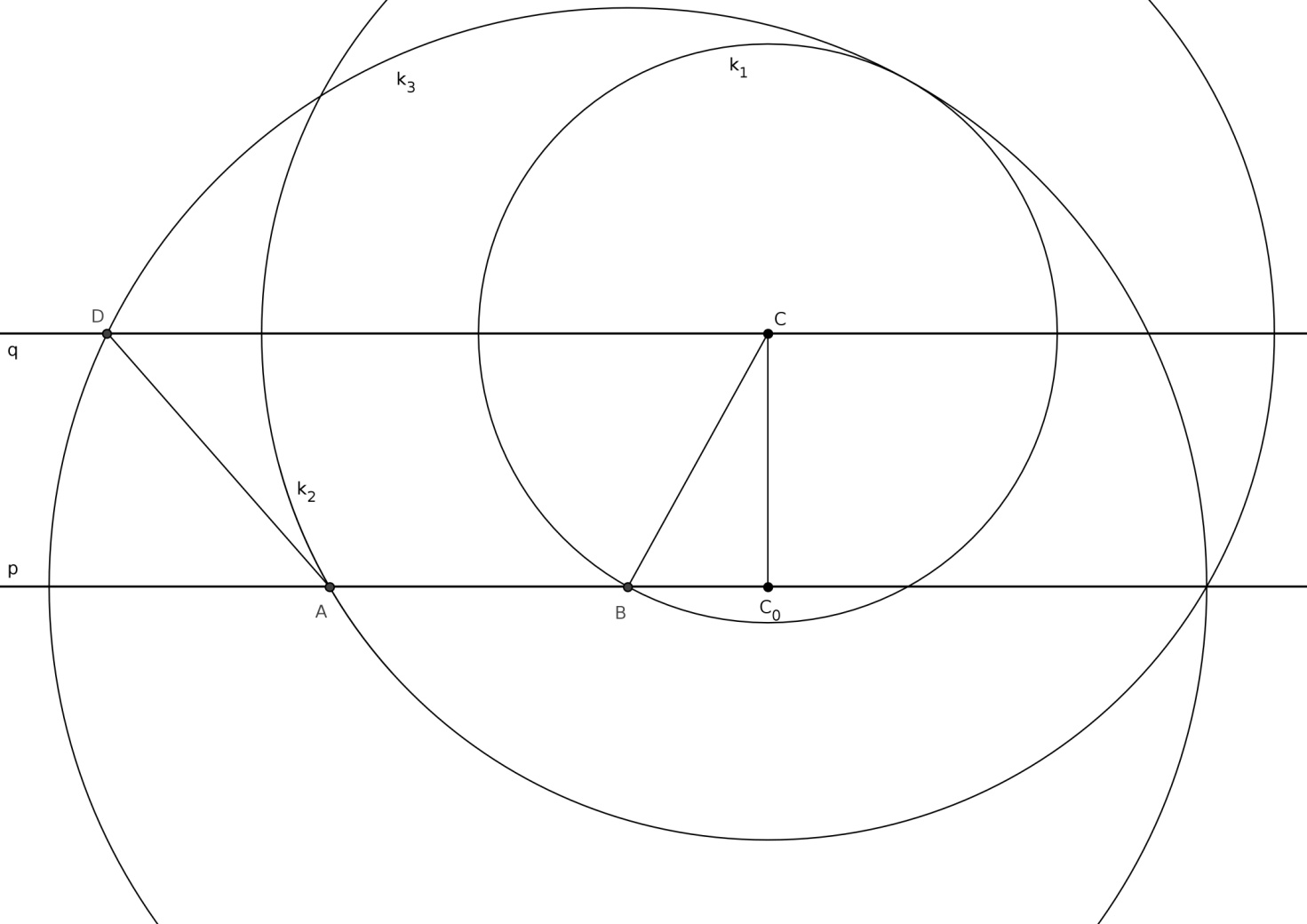
10, lichoběžník

Konstrukce.

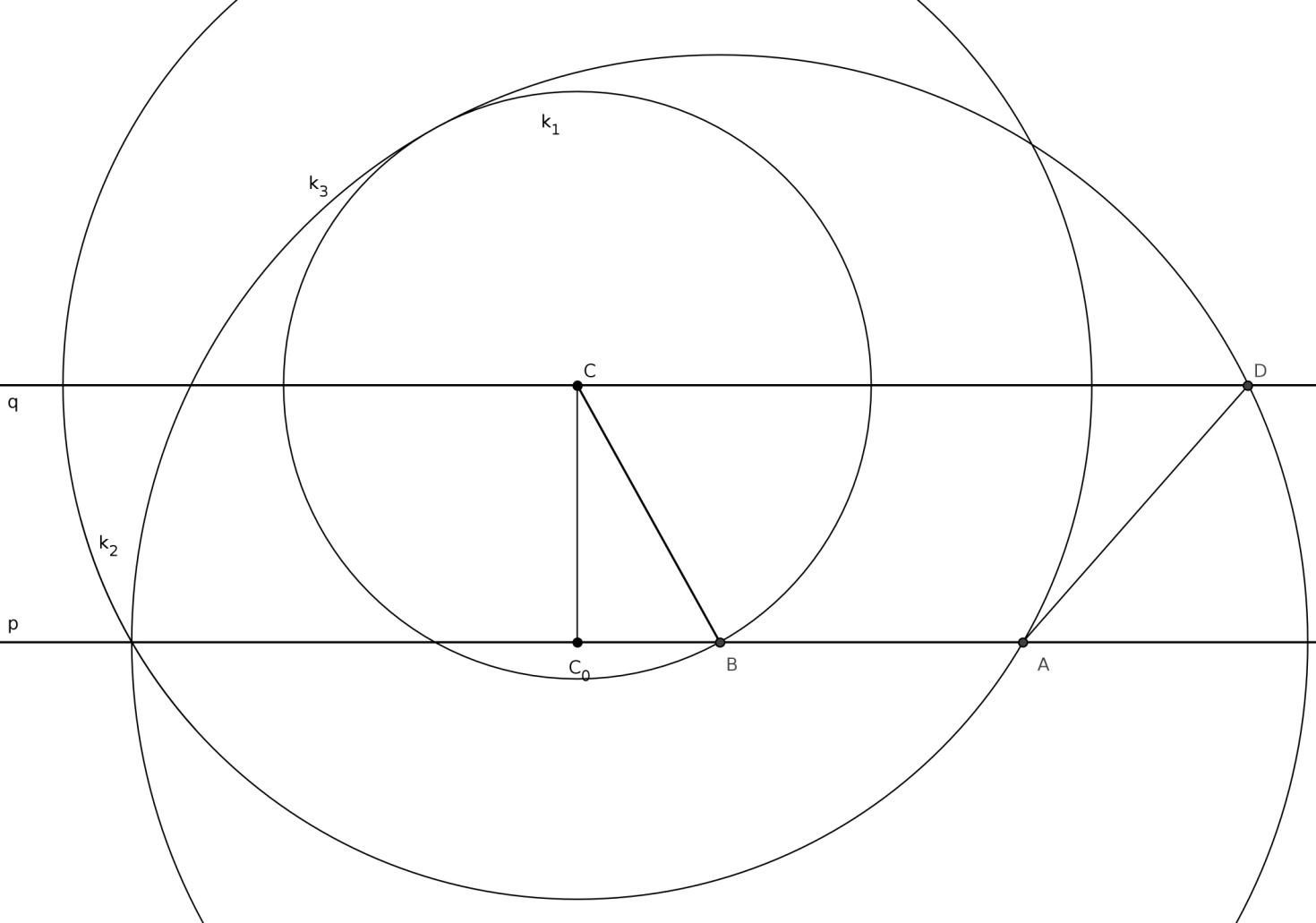
Úloha má tedy 4 řešení (obr. 4a až 4d).



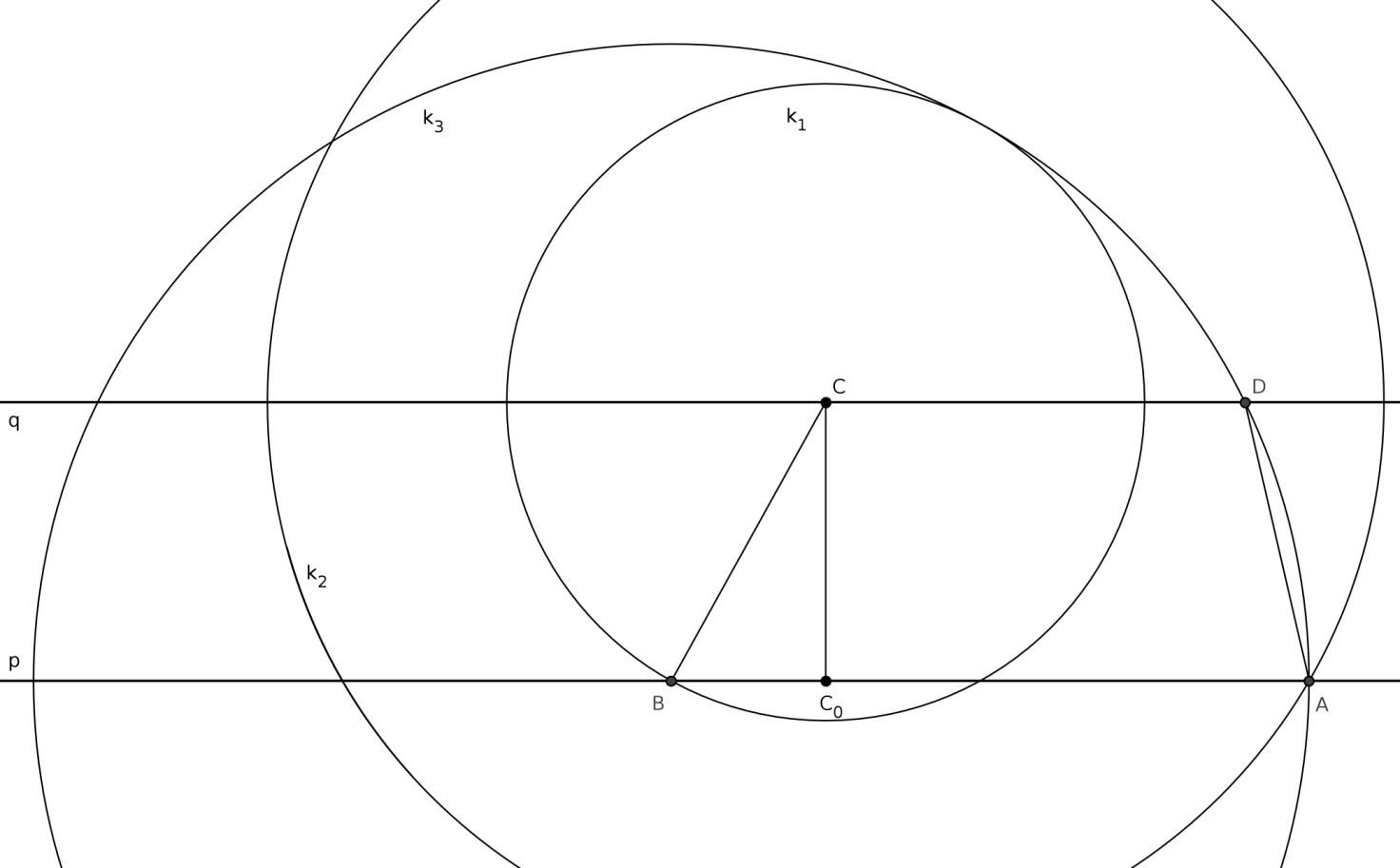
obr. 4a



obr. 4b



obr. 4c



obr. 4d

Diskuse.

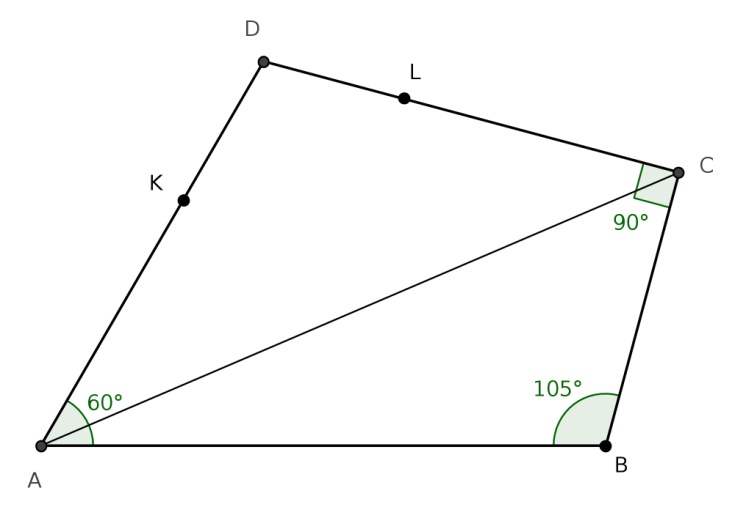
Úloha má 4 řešení.

**3) Sestrojte čtyřúhelník *ABCD*, je-li dáno *a* = 6,5 cm, *α* = 60 °, *γ* = 90 °, *δ* = 105°, *e* = 8 cm.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 5).



obr. 5

Trojúhelník *ABC* je zadán podle věty *Ssu*, totiž velikost úhlu *β* si lze snadno dopočítat: *β* = 360 ° - (*α* + *γ* + *δ*) = 105°. Bod *D* je společným bodem ramen úhlů *BAK* a *BCL*, přičemž , . Tedy . Z těchto úvah vyplývá postup konstrukce.

Popis konstrukce.

1,

2,

3,

4,

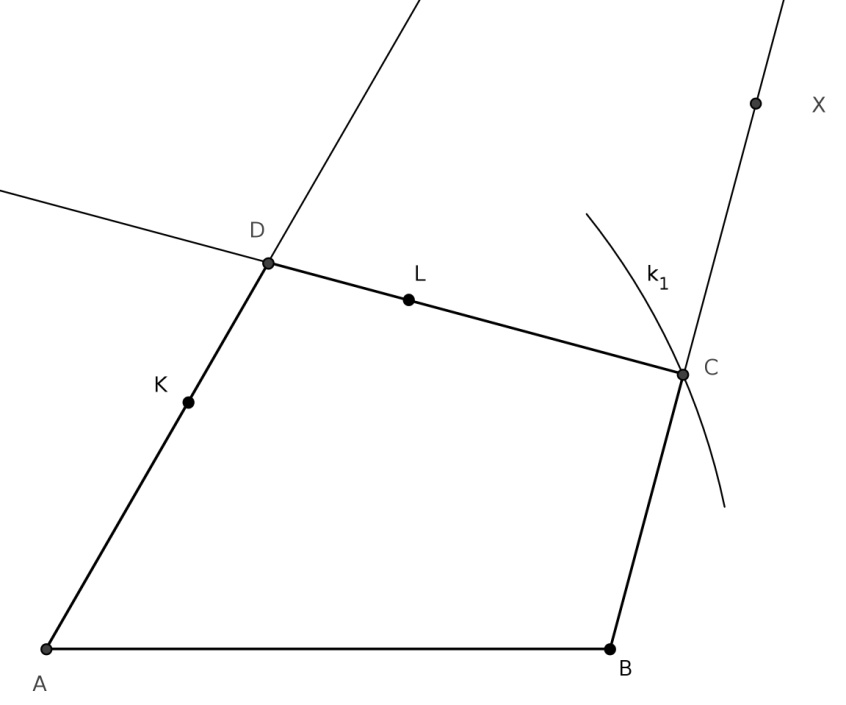
5,

6,

7,

8, čtyřúhelník

Konstrukce.



obr. 6

Diskuse.

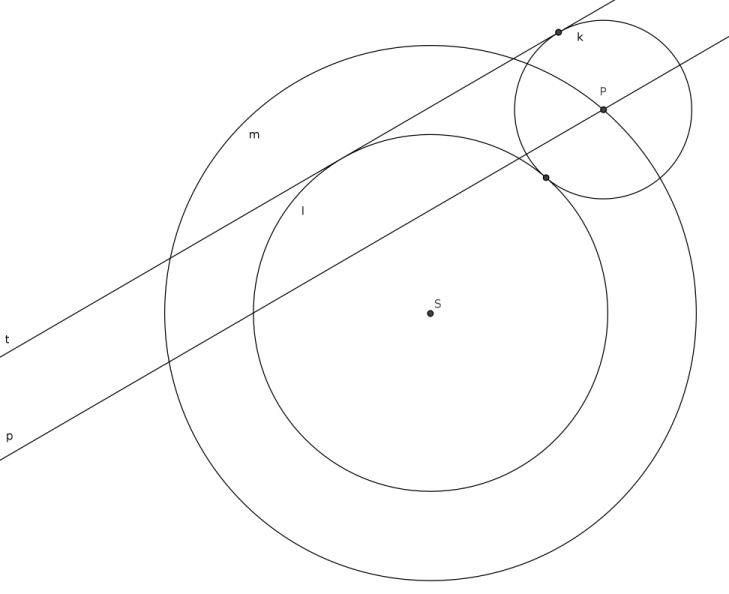
Úloha má 1 řešení.

**4) Je dána kružnice *l*(*S*,2 cm) a přímka *t*, která je tečnou této kružnice. Sestrojte všechny kružnice, které mají poloměr 1 cm, dotýkají se přímky *t* a s kružnicí *l* mají vnější dotyk.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 7).



obr. 7

Bod *P* je od přímky *t* vzdálen 1 cm – leží tedy na přímce, která je tvořena všemi takovými body, bod *P* zároveň leží na kružnici *m*, která je tvořena středy všech kružnic, které mají s kružnicí *l* vnější dotyk. Bod *P* je potom průnikem těchto množin bodů. Odtud plynou hlavní body konstrukce:

1,

2,

3,

Popis konstrukce.

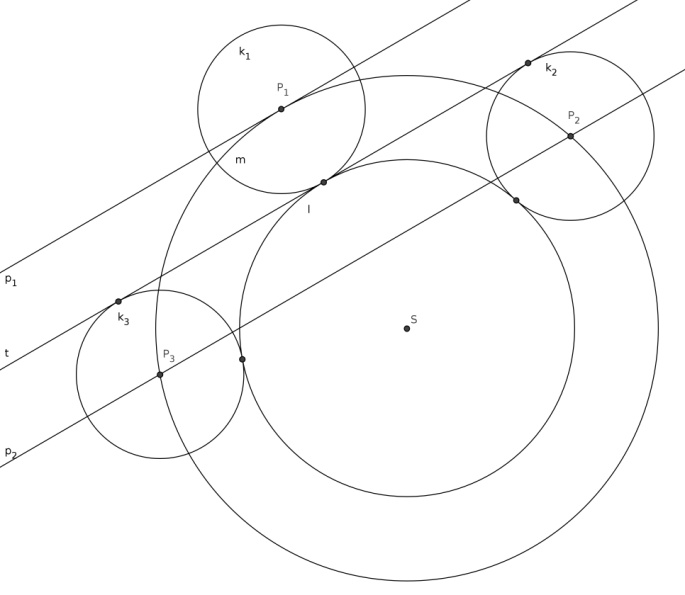
1,

2, *m*

3,

4, *k*

Konstrukce.



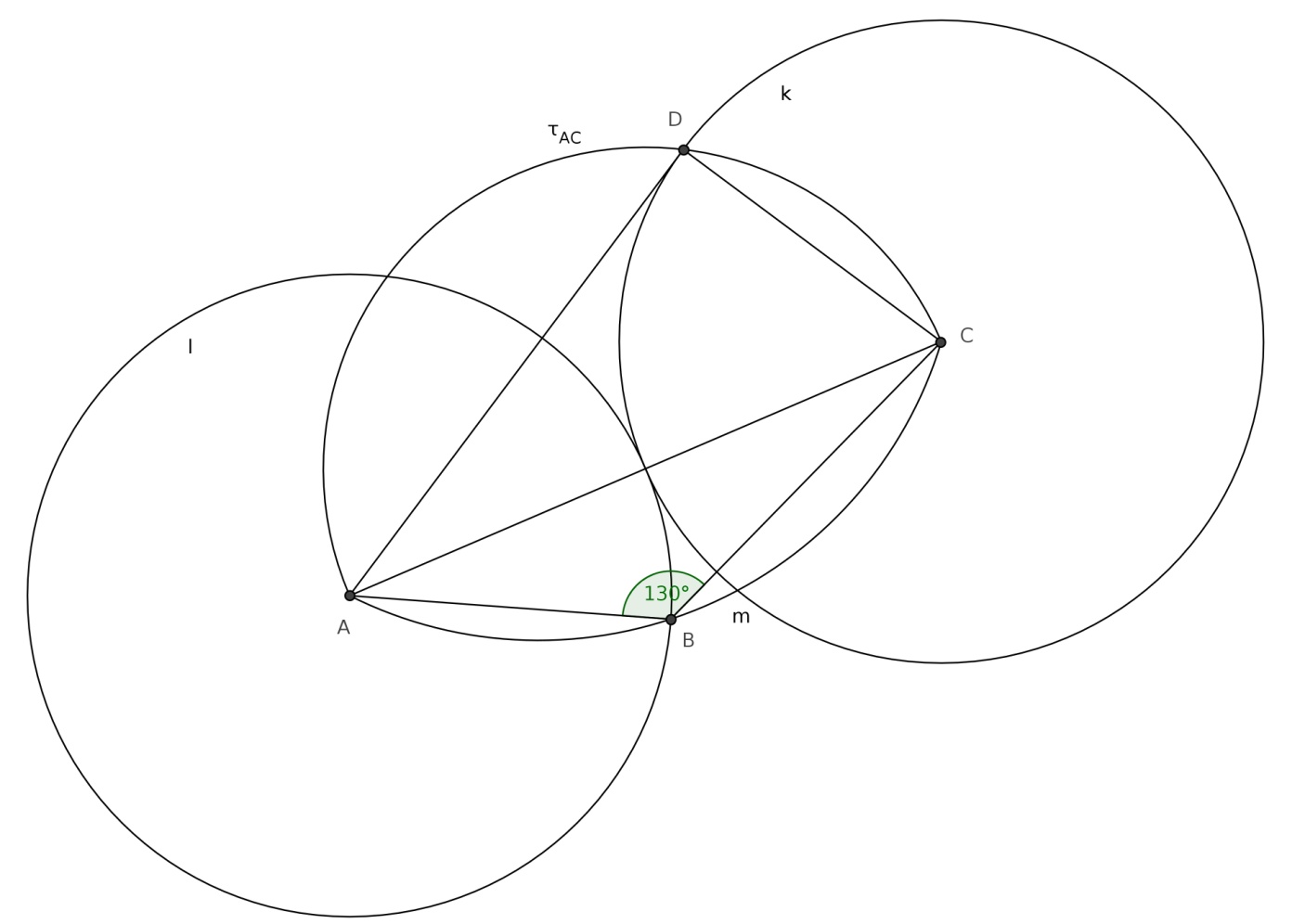
obr. 8

Diskuse.

Úloha má 3 řešení. V obr. 8 jsou označeny indexy 1­–3.

**5) Je dána úsečka *AC*, |*AC*| = 8 cm. Sestrojte všechny čtyřúhelníky *ABCD* tak, aby *a* = *c* = 4 cm, *β* = 130° , *δ* = 90°.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 9).

obr. 9

Body *A, C* jsou dány, zbývá nalézt body *D* a *B*. Bod *D* je průnikem množiny bodů, ze které je úsečka *AC* vidět pod pravým úhlem (tj. Thaletova kruž. nad *AC*) a množiny bodů, které mají od *C* vzdálenost 4 cm. Podobně bod *B* je průnikem množiny bodů, ze které je úsečka *AC* vidět pod úhlem 130° a množiny bodů, které mají od *A* vzdálenost 4 cm. Z těchto úvah vyplývají hlavní body postupu konstrukce:

1,

2,

3,

4, *m*, *m* je množina bodů, ze kterých je úsečka AC vidět pod úhlem 130°

5,

6,

Popis konstrukce.

1, *AC;* |*AC*| = 8 cm

2,

3,

4,

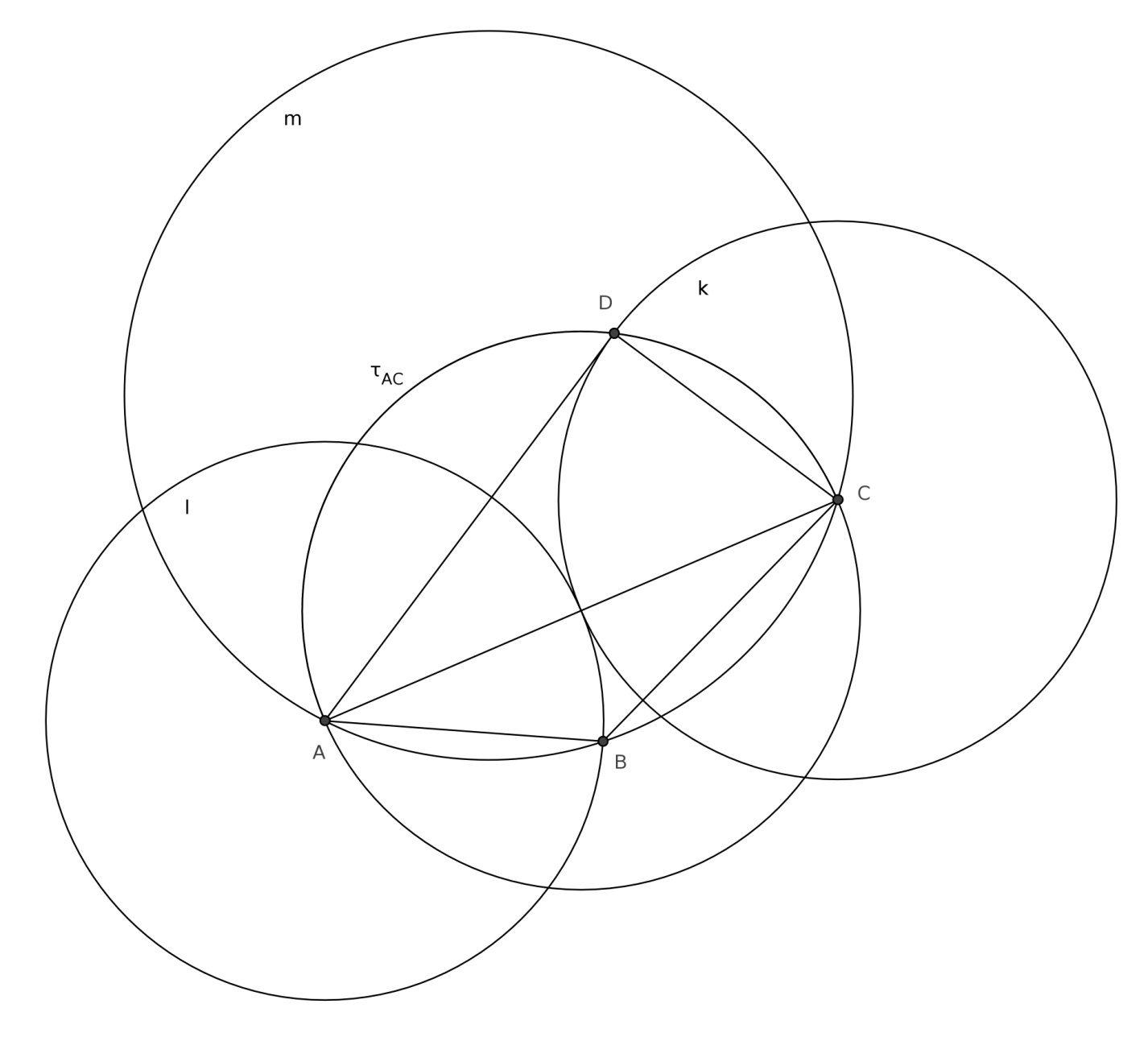
5,

6,

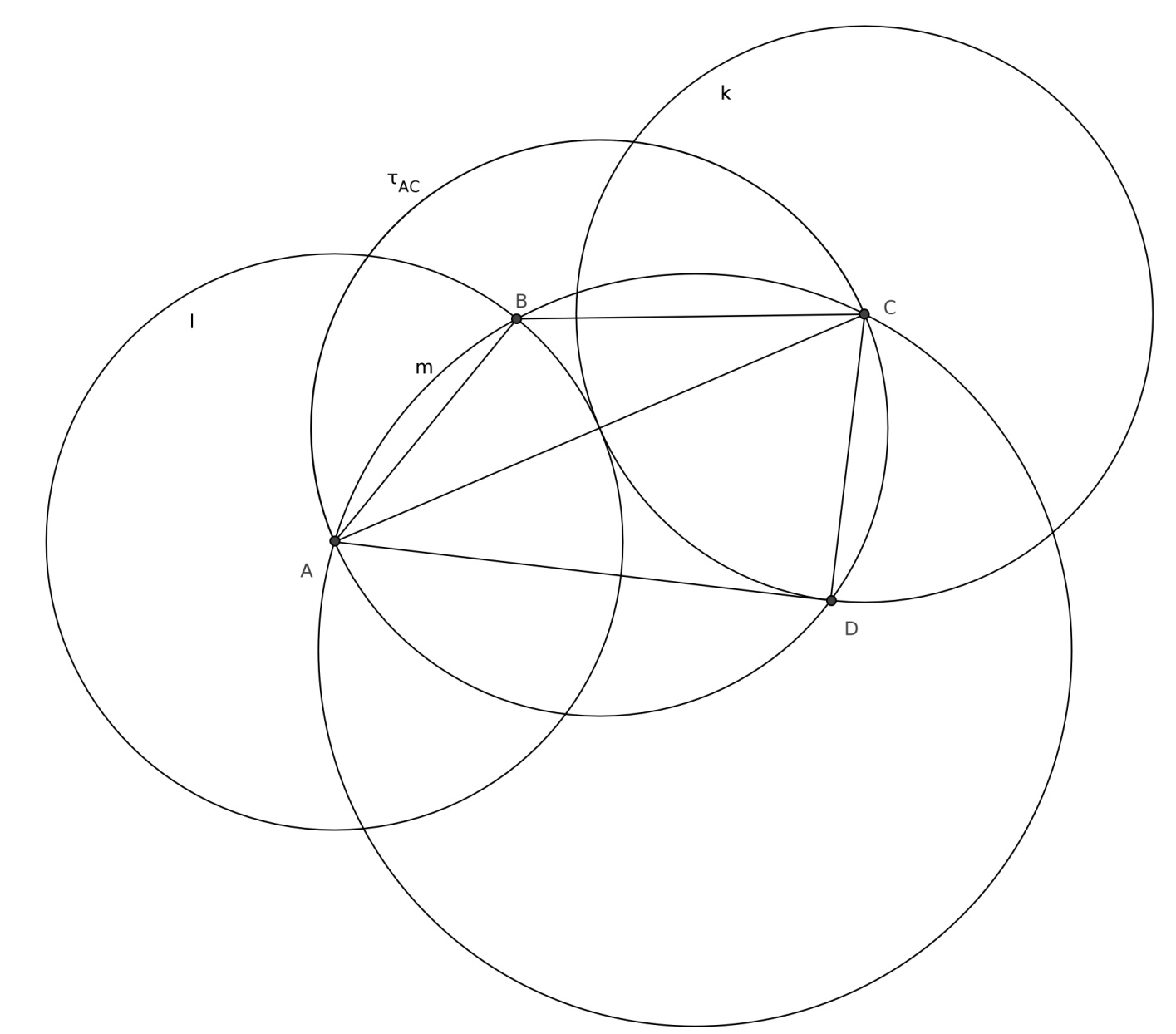
7, , přičemž akceptujeme pouze průsečík v opačné polorovině, než je bod *S*

8, čtyřúhelník

Konstrukce.



obr. 10a



obr. 10b

Diskuse.

Úloha má 2 řešení.

**Úlohy k procvičení:**

1. Je dána úsečka *AB* (|*AB*| = 6 cm). Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí *a* = 5 cm, *t*c = 5 cm.

[Návod: Podle věty *sss* sestrojíme trojúhelník *C1BC* (|*C1B*| = 3 cm). Bod *A* potom leží na polopřímce *BC1*.]

1. Sestrojte trojúhelník *ABC*, pro který platí *γ* = 75°, *va* = 3,5 cm, *r* = 2,5 cm, kde *r* je poloměr kružnice opsané.

[Návod: Úhel *ACB* má poloviční velikost než úhel *ASB*, kde *S* je střed kružnice opsané. Označme *A*0 patu výšky *va.* Bod *A*0 je společným bodem Thaletovy kružnice nad úsečkou *AB* a kružnice se středem v bodě *A* a poloměrem *va*.]

1. Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB* || *CD*), pro který platí *b* = 4 cm, *c* = 2 cm, *α* = 60°, *f* = 5 cm.

[Návod: Trojúhelník *BCD* lze sestrojit podle věty *sss*. Bod *A* je potom společným bodem rovnoběžky s *CD* procházející bodem *B* a kružnice, ze které je úsečka *BD* vidět pod úhlem *α*.]

1. Sestrojte čtyřúhelník *ABCD*, pro který platí *a* = 5 cm, *c* = 3 cm, *α* = 75°, *e* = 4,5cm, *f* = 5,5 cm.

[Návod: Trojúhelník *ABD* lze sestrojit podle věty *Ssu*. Bod *C* musí mít od bodu *A* vzdálenost *c* a zároveň od bodu *A* vzdálenost *e* – je tedy průnikem náležitě sestrojených dvou kružnic.]

Autor souhlasí s bezplatným používáním tohoto materiálu pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá licenci Creative Commons, BY-NC-SA.

Autorem všech obrázků je Ondřej Chudoba. Autor souhlasí s jejich bezplatným používáním. Jakékoliv jejich další využití podléhá licenci Creative Commons, BY-NC-SA. Obrázky byly vytvořeny pomocí programu Geogebra (v. 4.0.19.0). Na požádání (chudoba/at/gvm/dot/cz) autor poskytne příslušné soubory typu .ggb.

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.