Aleš Trojánek
Gymnázium Velké Meziříčí

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt **ŠABLONY NA GVM**
registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948
III-2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

# 1. Mechanika

## 1. 13. Rozbor jedné úlohy - „smyčka smrti“

| | |
|---|---|
| **Autor:** | Aleš Trojánek |
| **Jazyk:** | čeština |
| **Datum vyhotovení:** | červen 2013 |
| **Cílová skupina:** | žáci gymnázia: 1. ročník čtyřletého studia a 5. ročník osmiletého studia, maturitní ročník, věk 16-19 let |
| **Druh učebního materiálu:** | podpora a doplnění výuky fyziky, materiál je určen i pro samostatnou práci žáků |
| **Očekávaný výstup:** | žáci si osvojí řešení typických fyzikálních úloh z mechaniky. |
| **Anotace:** | Učební materiál obsahuje vzorový příklad z části – mechanika tuhého tělesa. Může sloužit při výkladu, procvičování i pro samostatnou práci žáků. Velmi vhodný je pro přípravu k maturitní zkoušce z fyziky. |

Aleš Trojánek
Gymnázium Velké Meziříčí

# 1. 13. Rozbor jedné úlohy - „smyčka smrti“

Následující dvě úlohy se v různých obměnách vyskytují v různých učebnicích mechaniky, např. v [1], s. 196, 199, 321 a v [2], s. 230. Protože však při jejich řešení se objevují někdy nejasnosti (např. o kostce se uvažuje jako o kuličce), budeme se v tomto textu věnovat jejich fyzikálnímu rozboru.

## Příklad 1: Kostka na dráze tvaru „smyčky smrti“

Malá kostka o hmotnosti $m$ může klouzat bez tření po dráze tvaru „smyčky smrti“ znázorněné na obr. 1. Z jaké výšky $h$ je třeba kostku volně pustit, aby ztratila kontakt se smyčkou právě při průchodu jejím vrcholem. (Ztráta kontaktu se smyčkou je charakterizována tím, že síla smyčky na kostku se právě anuluje.)

### *Řešení:*

Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie a srovnáme energii kostky v tíhovém poli Země ve dvou polohách: v bodech $P$ a $T$.

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

V neinerciální vztažné soustavě spojené s kostkou pro bod $T$ platí:

$$\overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_{sm}} + \overrightarrow{F_0^*} = \vec{0}, \qquad (2)$$

neboť kostka je v této soustavě v klidu. Jednotlivé síly působící na kostku jsou: tíhová síla $\overrightarrow{F_G}$, síla od smyčky $\overrightarrow{F_{sm}}$ a setrvačná odstředivá síla $\overrightarrow{F_0^*}$.

Protože při průchodu bodem $T$ je síla od smyčky na kostku nulová, ze vztahu (2) a podle obr. 1 dostaneme:

$$F_0^* = F_G,$$

$$m\frac{v^2}{R} = mg,$$

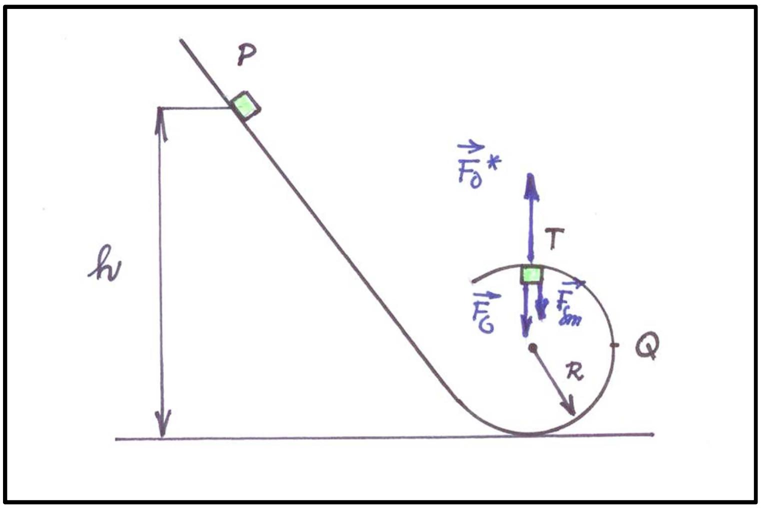
$$v^2 = Rg. \qquad (3)$$

Dosadíme-li ze vztahu (3) do vztahu (1), postupně dostaneme:

$$h = 2{,}5R.$$

Doplňující úkol: Jaká je výslednice sil působících na kostku v okamžiku jejího průchodu bodem Q?

[Výsledek: Vodorovná složka míří vlevo a má velikost $8mg$, svislá složka míří dolů a má velikost $mg$.]




Obr. 1

## Příklad 2: Kulička na dráze tvaru „smyčky smrti"

Malá plná kulička o hmotnosti $m$ a poloměru $r$ se valí bez klouzání po nakloněné rovině zakončené smyčkou podle obr. 2. Kulička byla uvolněna ve výšce $h$ nad úrovní vodorovné podlahy. Určete nejmenší hodnotu $h$, při které kulička ještě neprojde vrcholem smyčky. Poloměr $R$ smyčky je mnohonásobně větší než poloměr $r$ kuličky.

### *Řešení:*

I když je formulace zadání příkladu trochu odlišná od toho předchozího, pro bod $T$ můžeme provést stejnou úvahu: Budeme uvažovat hraniční případ, že kulička v bodě $T$ ztrácí kontakt se smyčkou. Pak v neinerciální vztažné soustavě spojené s těžištěm kuličky pro bod $T$ platí rovnice (2):

$$\overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_{sm}} + \overrightarrow{F_0^*} = \vec{0}.$$

Stejným postupem jako v příkladu (1) zjistíme, že platí

$$v_T^2 = Rg.$$

Symbolem $v_T$ jsme označili velikost rychlosti, kterou se pohybuje těžiště kuličky.

Pro určení nejmenší hodnoty výšky $h$, při které kulička ještě projde vrcholem smyčku, použijeme opět zákon zachování mechanické energie, který však bude mít jiný tvar:

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}J_T\omega^2. \qquad (4)$$

Na pravé straně rovnice (4) přibyl další člen, který představuje kinetickou energii otáčivého pohybu kuličky, $J_T$ je moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose vedené jejím těžištěm. Z dalších úprav rovnice (4) upozorníme na použití vztahu $v_T = \omega r$ mezi velikostí rychlosti těžiště kuličky, jejím poloměrem a její úhlovou rychlostí, který jsme podrobně rozebírali v souboru 1. 12 v příkladu o valení.

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2$$

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mv_T^2$$

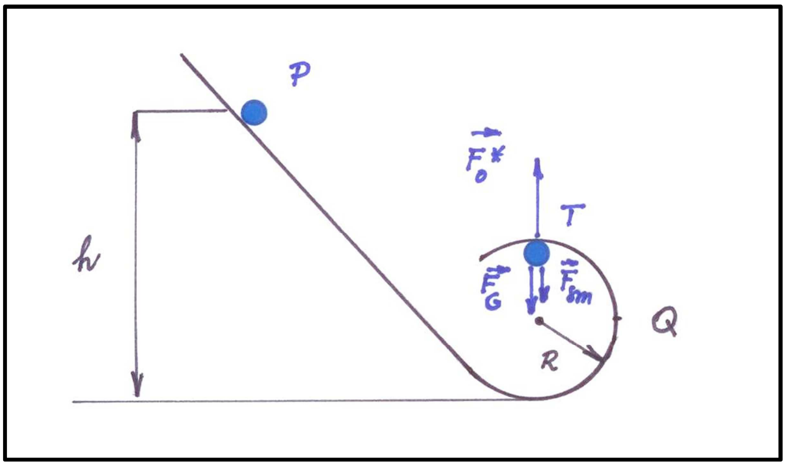
$$gh = 2gR + \frac{7}{10}v_T^2$$

$$gh = 2gR + \frac{7}{10}gR$$

$$h = 2{,}7R$$

Doplňující úkol: Pro hodnotu $h = 6R$ vypočtěte vodorovnou složku síly, kterou působí dráha na kuličku v bodě $Q$.

[Výsledek: Vodorovná složka míří vlevo a má velikost $\frac{50}{7}mg$.]




Obr. 2

## Literatura:

[1] HALLIDAY, D., RESNICK, J., WALKER, J.: *Fyzika*. *(Vysokoškolská učebnice obecné fyziky.)* VUT v Brně - nakladatelství VUTIUM a Prometheus, Brno 2001. Dotisk 2003. ISBN 80-214-1868-0.

[2] BEDNAŘÍK, M., ŠIROKÁ, M.: *Fyzika pro gymnázia. Mechanika*. Prometheus, Praha 2000. Dotisk 3. vydání.

## Zdroje obrázků:

Obr. 1, 2 zhotovil Aleš Trojánek a jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení.