INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

SOUSTAVY ROVNIC A SLOVNÍ ÚLOHY K NIM VEDOUCÍ

Autor	Hana Macholová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	5. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá řešení soustav lineárních rovnic a umí je aplikovat při řešení slovních úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené úlohy:

1. Určete všechna čísla $p, q, r, s \in R$ tak, aby byla řešením následující soustavy rovnic:

$$p+q+r+s=8$$
$$2p-q+r-2s=4$$
$$3p+q+2r+s=17$$
$$p-q+3r+2s=10$$

Řešení:

Sestavíme matici a využijeme Gaussovu eliminační metodu, jež spočívá v úpravě matice na schodovitý tvar. Tím budeme schopni zjistit hodnotu jedné proměnné. Poté, co nalezneme hodnotu jedné proměnné, můžeme ji začít dosazovat do dalších rovnic.

Matice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku matice upravené na schodovitý tvar získáme rovnici $9s=18 \Rightarrow s=2$,
ze třetího řádku: $-r+2s=3 \Rightarrow r=1$,
ze druhého řádku: $3q+r+4s=12 \Rightarrow q=1$,
z prvního řádku: $p+q+r+s=8 \Rightarrow p=4$.
Řešení lze zapsat jako uspořádanou čtveřici [p;q;r;s]=[4;1;1;2].

2. Trojciferné přirozené číslo n má ciferný součet 15. Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v opačném pořadí, získáme číslo, které je o 99 menší než číslo n. Dělíme-li se zbytkem prostřední číslici součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek 1.

Řešení:

Číslo zapíšeme ve tvaru $xyz \Rightarrow$ jeho hodnota je $xyz = 100x + 10y + z$.
Číslo má ciferný součet $\Rightarrow x+y+z=15$.
Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v opačném pořadí, získáme číslo, které je o 99 menší než číslo původní $\Rightarrow 100x+10y+z=100z+10y+x+99$.
Dělíme-li se zbytkem prostřední číslici součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek 1 $\Rightarrow \dfrac{y}{x+z} = 1 + \dfrac{1}{x+z}$.

Získali jsme tedy soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých:

$$x+y+z=15$$
$$100x+10y+z=100z+10y+x+99$$
$$\frac{y}{x+z}=1+\frac{1}{x+z}$$

$$x+y+z=15$$
$$x-z=1$$
$$-x+y-z=1$$

Dosazovací metodou nebo Gaussovou eliminační metodou vypočítáme jednotlivé neznámé.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & -2 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 16 \end{array}\right)$$

Z jednotlivých řádků matice získáme rovnice:

$2y=16 \Rightarrow y=8$

$-y-2z=-14 \Rightarrow z=3$

$x+y+z=15 \Rightarrow x=4$

n=483

Kontrola úlohy:

n má ciferný součet 15: $4+8+3=15$

Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v opačném pořadí, získáme číslo, které je o 99 menší než číslo n: $483=384+99$ (platí).

Dělíme-li se zbytkem prostřední číslici součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek 1: $8:(4+3)=1\ [1]$ (platí).

Číslo n je 483.

3. Dva dělníci by společně splnili úkol za 12 dní. Po osmi dnech společné práce jeden z nich onemocněl a druhý pracoval na dokončení úkolu dalších 10 dnů. Za kolik dnů by daný úkol zvládl každý zvlášť?

Řešení:

	doba plnění úkolu	část úkolu za 1 den	část úkolu za p dnů
1. dělník	X	$\frac{1}{x}$	$p\cdot\frac{1}{x}$
2. dělník	Y	$\frac{1}{y}$	$p\cdot\frac{1}{y}$
společně	12	$\frac{1}{12}$	$p\cdot\frac{1}{12}$

Část úkolu, kterou splní společně za 1 hodinu = součtu částí úkolu, jež splní za 1 hodinu každý zvlášť:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Součet části úkolu, který zvládnou společně za 8 dní a části, již vykoná druhý dělník za dalších 10 dnů, nám dá celý úkol:

$$8\cdot\frac{1}{12}+10\cdot\frac{1}{y}=1$$

Získali jste tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$8\cdot\frac{1}{12}+10\cdot\frac{1}{y}=1$$

Z druhé rovnice získáme y:

$$\frac{2}{3}+\frac{10}{y}=1$$

$$\frac{10}{y}=\frac{1}{3}$$

$$y=30$$

Dosadíme y=30 do první rovnice:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{60}$$

$$x=20$$

Kontrola slovní úlohy:

Společně by splnili úkol za 12 dní: $12\cdot\frac{1}{20}+12\cdot\frac{1}{30}=\frac{36+24}{60}=\frac{60}{60}=1$ (platí).

Když pracovali společně 8 dní a druhý pak dalších 10 sám, splnili celý úkol:

$$8\cdot\frac{1}{12}+10\cdot\frac{1}{30}=\frac{40+20}{60}=\frac{60}{60}=1 \quad \text{(platí)}.$$

Dělník, jenž onemocněl, by úkol zvládl za 20 dní, dělník, který úkol dokončil, by jej sám zvládnul za 30 dnů.

4. Máme směs lihu a vody. Pokud do ní přilijeme 5 litrů čistého lihu, získáme 80 % roztok lihu. Pokud do ní přilijeme 1 litr vody, dostaneme 50% roztok lihu. Určete objem a koncentraci původní směsi.

   Řešení:

   Označme si jako neznámé:
   Objem lihu v původní směsi…………x
   Objem vody v původní směsi……….y
   Objem směsi…………………………………x+y

Přilitím 5 litrů čistého lihu získáme 80% roztok: $\frac{líh}{roztok} = \frac{x+5}{x+5+y} = 0{,}8$.

Přilitím 1 litru vody dostaneme 50% roztok: $\frac{líh}{roztok} = \frac{x}{x+y+1} = 0{,}5$.

Budeme tedy řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{x+5}{x+5+y} = 0{,}8 \quad / \cdot 10(x+5+y)$$

$$\frac{x}{x+y+1} = 0{,}5 \quad / \cdot 10(x+y+1)$$

$$10x + 50 = 8x + 40 + 8y$$
$$10x = 5x + 5y + 5$$

$$2x - 8y = -10 \Rightarrow x = 4y - 5$$
$$5x - 5y = 5$$

$$5(4y-5) - 5y = 5$$
$$20y - 25 - 5y = 5$$
$$15y = 30$$
$$y = 2$$
$$x = 4y - 5 = 8 - 5 = 3$$

Objem směsi: $x + y = 2 + 3 = 5$

Původní koncentrace: $\frac{líh}{roztok} = \frac{x}{x+y} = \frac{3}{5} = 60\%$

Kontrola slovní úlohy:
Pokud do směsi přilijeme 5 litrů čistého lihu, získáme 80 % roztok lihu:
$\frac{3+5}{3+5+2} = \frac{8}{10} = 80\%$ (platí).
Pokud do směsi přilijeme 1 litr vody, dostaneme 50% roztok lihu:

$\frac{3}{3+2+1} = \frac{3}{6} = 50\%$ (platí).

Objem původní směsi byl 5 litrů a původní koncentrace 60%.

5. Po okruhu dlouhém 2550 metrů jezdí dva motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě a dohánějí se každých pět minut, pokud jezdí stejným směrem. Určete jejich rychlosti.

Rychlost rychlejšího motocyklisty……….. v_1 ms^{-1}
Rychlost pomalejšího motocyklisty…….. v_2 ms^{-1}

Jedou-li proti sobě, ujedou celkem za 1 minutu (60 s) jeden okruh, tedy dráhu 2550 m:

$$\left.\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 2550 \\ s_1 = v_1 \cdot t_1 &= v_1 \cdot 60 \\ s_2 = v_2 \cdot t_2 &= v_2 \cdot 60 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 60v_1 + 60v_2 = 2550$$

Jedou-li stejným směrem, dohánějí se každých 5 minut (300 s), tedy rozdíl drah je jeden okruh, tedy 2550 m.

$$\left.\begin{aligned} s_1' - s_2' &= 2550 \\ s_1' = v_1 \cdot t_1' &= v_1 \cdot 300 \\ s_2' = v_2 \cdot t_2' &= v_2 \cdot 300 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 300v_1 - 300v_2 = 2550$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$60v_1 + 60v_2 = 2550 \quad / \cdot 5$$

$$300v_1 - 300v_2 = 2550$$

$$300v_1 + 300v_2 = 12750$$

$$300v_1 - 300v_2 = 2550$$

$$600v_1 = 15300 \quad / \cdot \frac{1}{600}$$

$$v_1 = 25{,}5 \text{ ms}^{-1}$$

$$60v_2 = 2550 - 60 \cdot 25{,}5$$

$$v_2 = 17 \text{ms}^{-1}$$

Kontrola slovní úlohy:
Jedou-li proti sobě, ujedou celkem za 1 minutu (60 s) jeden okruh, tedy dráhu 2550 m:
$s_1 + s_2 = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = 25{,}5 \cdot 60 + 17 \cdot 60 = 2550$ (platí).
Jedou-li stejným směrem, dohánějí se každých 5 minut (300 s), tedy rozdíl drah je jeden okruh, tedy 2550 m.
$s_1 - s_2 = v_1 \cdot t_1 - v_2 \cdot t_2 = 25{,}5 \cdot 300 - 17 \cdot 300 = 2550$ (platí).

Motocyklisté jezdí rychlostí 25,5 ms^{-1} a 17 ms^{-1}.

6. V pravoúhlém trojúhelníku je součet délek stran 132 cm a součet obsahů čtverců nad jeho stranami je 6050 cm^2. Jak dlouhé jsou strany trojúhelníku?

Řešení:
Označme délky odvěsen a, b, délku přepony jako c.
Součet délek stran je 132 cm $\Rightarrow a + b + c = 132$.
Součet obsahů čtverců nad jeho stranami je 6050 cm^2 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6050$.
Jde o pravoúhlý trojúhelník, platí tedy Pythagorova věta: $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Budeme tedy řešit soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$a+b+c=132$$
$$a^2+b^2+c^2=6050$$
$$a^2+b^2-c^2=0 \;/\; (-1)$$

$$a+b+c=132$$
$$a^2+b^2+c^2=6050$$
$$-a^2-b^2+c^2=0 \;/\; (-1)$$

Sečtením druhé a třetí rovnice získáme:

$2c^2=3025 \Rightarrow c=55$

Dosadíme c do první rovnice:

$a+b+55=132 \Rightarrow a=77-b$

Za a a c dosadíme do 3 rovnice:

$$(77-b)^2+b^2=55^2$$
$$5929-154b+b^2+b^2=3025$$
$$2b^2-154b+2904=0$$
$$b^2-77b+1452=0$$
$$b_{1,2}=\frac{77\mp\sqrt{77^2-4\cdot1\cdot1452}}{2}$$
$$b_1=44$$
$$b_2=33$$
$$a_1=77-44=33$$
$$a_2=77-33=44$$

Kontrola úlohy:

Součet délek stran je 132 cm $\Rightarrow 33+44+55=132$ (platí).

Součet obsahů čtverců nad jeho stranami je 6050 cm^2 $33^2+44^2+55^2=6050$ (platí).

Jde o pravoúhlý trojúhelník, platí tedy Pythagorova věta: $\Rightarrow 33^2+44^2=55^2$ (platí).

Strany mají délky 33 cm, 44cm a 55 cm.

Úlohy k procvičení:

1. Nádrž se plní třemi přívody A, B, C. Současně otevřenými přívody A a B se naplní za 1 hodinu, přívody A a C za 45 minut, přívody B a C za 90 minut. Za jak dlouho by se nádrž naplnila každým přívodem zvlášť?

   [A za 1 hodinu 12 minut, B za 6 hodin a C za 2 hodiny]

2. Jsou dána tři čísla, jež mají následující vlastnosti: Zmenšíme-li první i druhé o tři, pak takto vzniklá čísla jsou v poměru 1:2. Zmenšíme-li první a třetí o čtyři, jsou nová čísla v poměru 1:3. Zvětšíme-li druhé i třetí o pět, získáme čísla, jejichž poměr je 3:4. Určete daná čísla.

   [17; 31; 43]

3. Vlak jede stálou rychlostí po přímé trati, podél níž vede silnice. Po této silnici se pohybují dvě auta. První jede rychlostí 54 kmh^{-1} proti směru vlaku a druhé rychlostí 72 kmh^{-1} ve směru pohybu vlaku. První auto projede podél celého vlaku za 12 sekund, druhé za 72 sekund. Vypočítejte rychlost vlaku a jeho délku.

   [rychlost 54 kmh^{-1}, délka 360 m]

4. Zvětšíme-li šířku obdélníku o 5 m a délku o 10 m, zvětší se jeho obsah o 625 m^2. Zvětšíme-li jeho šířku o 10 m a délku o 5 m, zvětší se jeho obsah o 675 m^2. Určete rozměry obdélníku.

[35m; 45m]

5. Vrcholy trojúhelníku se stranami délek 6 cm, 8 cm a 10 cm jsou středy kružnic, z nichž každé dvě mají vnější dotyk. Vypočítejte poloměry těchto kružnic.

[2 cm; 4cm; 6cm]

6. Celkový proud 4,5 A protéká dvěma paralelními větvemi elektrického obvodu o odporech R_1=60Ω, R_2=90Ω. Určete proud v jednotlivých větvích.

[I_1=2,7A; I_2=1,8A]

7. Vsuneme-li mezi cifry daného dvoumístného čísla cifru 7, dostaneme jeho jedenáctinásobek. Pokud před dané číslo postavíme jedničku, získáme jeho pětinásobek. Určete toto číslo.

[25]

8. Pokud dva povozy vyjedou proti sobě z míst vzdálených 3 km, setkají se za 15 minut. Jestliže pojedou týmž směrem, dožene jeden povoz druhý za 1 hodinu. Jaké jsou rychlosti povozů?

[7,5 kmh^{-1}; 4,5 kmh^{-1}]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. 4. vydání. Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-076-4.

KOVÁČIK, Jan. *Řešené příklady z matematiky pro střední školy*. 1 vydání. Praha: ASPI Publishing, 2001. ISBN 80-7357-005-X.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.