Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNĚNCI (iracionální rovnice)

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	13. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá řešení rovnic s neznámou v odmocněnci a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Rovnice s neznámou pod odmocninou

Příklad 1

Řešte rovnici $\sqrt{3x-5} = 4.$

Řešení:

1. způsob

$$\sqrt{3x-5} = 4 \qquad /^2$$
$$3x-5 = 16$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

Jediným možným kořenem dané rovnice je číslo 7. Protože jsme ale prováděli neekvivalentní (důsledkovou) úpravu, je nutnou součástí řešení zkouška. Proto
L(7) = $\sqrt{3.7-5} = \sqrt{21-5} = \sqrt{16} = 4,$ $\quad P(7) = 4,$ $\quad L(7) = P(7)$
Zkouška prokázala, že číslo 7 je opravdu řešením dané rovnice.

2. způsob

Odmocnina na levé straně je definovaná pouze tehdy, když $3x-5 \geq 0$, tj. pro $x \in \left\langle\frac{5}{3};\ +\infty\right)$. Rovnici tedy řešíme v tomto intervalu. Pro každé číslo x z tohoto intervalu jsou obě strany rovnice nezáporné a jejich umocnění je v intervalu $\left\langle\frac{5}{3};\ +\infty\right)$ ekvivalentní úprava. Stejně jako v 1. způsobu řešení vypočítáme x = 7. A protože 7 $\in \left\langle\frac{5}{3};\ +\infty\right)$, je číslo 7 kořenem dané rovnice. Po předchozích úvahách zkoušku provádět nemusíme.

Příklad 2

Řešte rovnici $\sqrt{7-x} = x-1.$

Řešení:

1. způsob

$$\sqrt{7-x} = x-1 \qquad /^2$$
$$7-x = x^2-2x+1$$
$$x^2-x-6 = 0$$
$$x_1 = -2;\ x_2 = 3$$

Opět jsme prováděli neekvivalentní úpravu a proto je zkouška nutnou součástí řešení.

$L(-2) = \sqrt{7-(-2)} = \sqrt{9} = 3 \qquad P(-2) = -2-1 = -3 \qquad L(-2) \neq P(-2)$

$L(3) = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \qquad P(3) = 3-1 = 2 \qquad L(3) = P(3)$

Jediným kořenem dané rovnice je číslo $x_2 = 3$.

2. způsob

Musíme stanovit podmínky řešitelnosti. Pro levou stranu rovnice je to interval $(-\infty; 7\rangle$ (ve kterém platí, že $7-x \geq 0$). Pro pravou stranu rovnice je to interval $\langle 1;\ +\infty)$ (zde je $x-1 \geq 0$). Protože obě podmínky musí platit současně, je jejich průnikem interval $\langle 1; 7\rangle$. Pro všechna $x \in \langle 1; 7\rangle$ jsou obě strany nezáporné, umocnění na druhou je ekvivalentní úpravou. Z vypočtených kořenů $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ patří do tohoto intervalu jen druhý a daná rovnice má jediné řešení $x_2 = 3$.

Příklad 3

Řešte rovnici $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$

Řešení:

Omezíme se nyní na 1. způsob řešení, zkouška je nedílnou součástí řešení.

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4 \qquad /^2$$
$$2x - 3 + 2.\sqrt{(2x-3).(4x+1)} + 4x + 1 = 16$$
$$2.\sqrt{8x^2 - 10x - 3} = -6x + 18 \qquad /^2$$
$$4.(8x^2 - 10x - 3) = 36x^2 - 216x + 324$$
$$32x^2 - 40x - 12 = 36x^2 - 216x + 324$$
$$4x^2 - 176x + 336 = 0$$
$$x^2 - 44x + 84 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{44 \pm \sqrt{44^2 - 4.84}}{2} = \frac{44 \pm 40}{2}$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = 42$$

Zkouškou zjistíme, že řešením je pouze číslo 2.

Příklad 4

Řešte rovnici $\sqrt{z^2+3} = 2.$

Řešení:

Výraz $z^2 + 3$ je nezáporný pro všechna reálná čísla *z*, číslo 2 je také nezáporné, umocnění je tentokrát ekvivalentní úprava.

$$\sqrt{z^2+3} = 2 \qquad /^2$$
$$z^2 + 3 = 4$$
$$z^2 - 1 = 0$$
$$(z-1).(z+1) = 0$$
$$z_1 = 1;\ z_2 = -1.$$

Úlohy k procvičení

V množině ***R*** řešte následující rovnice

1. $\sqrt{2x-1}=5$ [13]
2. $\sqrt{2-3x}=-2$ [∅]
3. $\sqrt{6-x}=2$ [2]
4. $\sqrt{12-x}=x$ [3]
5. $x-\sqrt{x-1}=5$ [8]
6. $2\sqrt{x+5}=x+2$ [4]
7. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$ [4]
8. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$ [2; 34]
9. $\sqrt{x-9}=7-\sqrt{x-16}$ [25]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.
SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.