



Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

VZTAHY MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY KVADRATICKÝCH ROVNIC (včetně vztahů v C)

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	7. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratických rovnic a to i v oboru komplexních čísel a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratických rovnic (včetně vztahů v C)

Pro kořeny x_1, x_2 rovnice $x^2+px+q=0$, kde $p, q \in \mathbf{R}$, $p^2 - 4q \geq 0$, platí:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Příklad 1

Použitím Viětových vztahů určete kořeny rovnice $x^2 - x - 12 = 0$.

Řešení:

Součin kořenů se musí rovnat -12 , jejich součet je $+1$. Řešením soustavy 2 rovnic pro 2 neznámé (nebo v tomto případě „uhodnutím“) snadno určíme kořeny $x_1 = 4$ a $x_2 = -3$.

Příklad 2

Najděte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla 3 a $\frac{2}{3}$.

Řešení:

Víme, že rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) má kořeny x_1, x_2 právě tehdy, když platí $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$. Hledané kvadratické rovnice jsou proto právě všechny rovnice

$$a \cdot (x - 3) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$a \cdot \left(x^2 - \frac{11}{3}x + 2\right) = 0$$

a po vynásobení obou stran rovnice třemi

$$a \cdot (3x^2 - 11x + 6) = 0, \\ a \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

Příklad 3

Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ má smysl zlomek $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$, a je-li to možné, upravte ho na jednodušší tvar.

Řešení:

Pomocí Viětových vztahů určíme kořeny kvadratického trojčlenu v čitateli i ve jmenovateli a můžeme psát

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-3) \cdot (x-4)}{(x-3) \cdot (x-5)} = \frac{x-4}{x-5}$$

Daný zlomek je definovaný pro $\forall x \in \mathbf{R}$, pro která je jeho jmenovatel různý od nuly, tj. pro $x \neq 3, x \neq 5$.

Příklad 4

Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla $5 - i$, $5 + i$.

Řešení

Jsou-li čísla $x_1 = 5 - i$, $x_2 = 5 + i$ kořeny kvadratické rovnice tvaru $x^2 + px + q = 0$, pak platí:

$$(5 - i) + (5 + i) = -p$$

$$(5 - i) \cdot (5 + i) = q$$

Odtud již

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

Úlohy k procvičení

1. Určete kořeny následujících rovnic:

a) $x^2 - 9x - 22 = 0$ $[x_1 = -2; x_2 = 11]$

b) $x^2 + 4x - 96 = 0$ $[x_1 = -12; x_2 = 8]$

c) $4x^2 + 12x - 216 = 0$ $[x_1 = -9; x_2 = 6]$

2. Najděte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla:

a) 4; 7 $[a.(x^2 - 11x + 28) = 0]$

b) -2; 1 $[a.(x^2 + x - 2) = 0]$

c) $1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}$ $[a.(x^2 - 2x - 4) = 0]$

3. Upravte:

a) $\frac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105}$ $\left[\frac{2.(x+9)}{3.(x-7)}; x \neq 5, x \neq 7\right]$

b) $\frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 6x - 7}$ $\left[\frac{(x+2).(x-5)}{(x-4).(x-1)}; x \neq -7, x \neq -3, x \neq 1, x \neq 4\right]$

c) $\frac{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}}{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}}$ $[1; x \neq -4, x \neq -2, x \neq 1, x \neq 3]$

4. Určete všechny hodnoty parametru $b \in \mathbf{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $2x^2 + bx + 9 = 0$ byl dvakrát větší než druhý kořen.

5. Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla

a) $2 - 3i, 1 + i$ $[x^2 + (2i - 3)x + 5 - i = 0]$

b) $[0; 1], [-5; 0]$ $[x^2 + (5 - i)x - 5i = 0]$

Použité zdroje a literatura:

- BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
- BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
- CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.
- CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. *Matematika – přehled středoškolského učiva*. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
- FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
- CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
- POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.
- SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.