INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

FINANČNÍ MATEMATIKA- ÚVĚRY

Autor	Hana Macholová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	20. 4. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák je schopen sestavit umořovací plán, vypočítat výši anuity při dané výši úvěru, úrokové míry, frekvenci splátek a době splácení, umí zjistit, kolik v takových případech klient zaplatí na úrocích a dokáže porovnat, jak se bude lišit výše úroku při různé době splácení resp. frekvenci splátek. Dále umí vypočítat, jakou částku si může klient, pokud ví, kolik je schopen po určitou dobu při dané úrokové míře ročně (či s jinou frekvencí) splácet.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Poznámka:

Úmor je splátka jistiny dluhu, tedy část splátky, o kterou se snižuje výše dlužné částky.

Umořovací plán je přehled výše splátek úvěru včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení. Obsahuje výši splátky, výši úmoru dluhu, výši úroku z dluhu, stav dluhu po odečtení úmoru (zbývající dlužnou částku).

Anuitní splátka (anuita) je splátka opakující se v pravidelných časových intervalech. Tyto platby mohou být stále stejné – konstantní anuita, ale není to pravidlem.

Při výpočtech budeme používat následující označení:

V – výše úvěru
s – výše anuitní splátky
i – úroková míra vyjádřená desetinným číslem
t – úrokovací období banky
n – počet anuit

Budeme využívat tzv. německý standard 30E/360, což je metoda určování délky úrokovacího období, kdy počítáme, že každý měsíc má 30 dnů, tedy rok má 360 dnů.

Využijeme zejména následující vztah:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}}$$

Samozřejmě v případě, že úrokovací období bude jeden rok, můžeme ze vztahů zlomek $\frac{t}{360}$ vynechat, protože když dosadíme za t = 360, pak dostaneme zlomek $\frac{360}{360} = 1$.

Řešené úlohy:

1) Banka poskytla podnikateli koncem roku 2010 úvěr ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 12% (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku. První dvě splátky budou činit 400000 Kč.
   a) Určete výši třetí splátky.
   b) Jakou částku zaplatí podnikatel bance celkem.
   c) Sestavte umořovací plán.

   a) Poslední splátka bude rovna výši dluhu na konci třetího roku (2013). Určíme tedy výše dluhu na koncích jednotlivých let:

      Konec roku 2011 před první splátkou:

      Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

      $$1000000\,Kč + 0{,}12 \cdot 1000000\,Kč = 1000000\,Kč + 120000\,Kč = 1120000\,Kč$$

      Konec roku 2011 po první splátce:

      $$1120000\,Kč - 400000\,Kč = 720000\,Kč$$

      Konec roku 2012 před druhou splátkou:

      Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

      $$720000\,Kč + 0{,}12 \cdot 720000\,Kč = 720000\,Kč + 86400\,Kč = 806400\,Kč$$

      Konec roku 2012 po druhé splátce:

      $$806400\,Kč - 400000\,Kč = 406400\,Kč$$

      Konec roku 2013 před poslední splátkou:

      Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

      $$406400\,Kč + 0{,}12 \cdot 406400\,Kč = 406400\,Kč + 48768\,Kč = 455168\,Kč$$

      Výše třetí splátky bude 455168 Kč.

   b) Celkovou částku získáme jakou součet jednotlivých splátek, tedy

      $$400000\,Kč + 400000\,Kč + 455168\,Kč = 1263296\,Kč$$

   c) Umořovací plán:

	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	Stav dluhu (Kč)
Počáteční stav	-	-	-	1000000
Konec r. 2011	400000	120000	280000	720000
Konec r. 2012	400000	86400	313600	406400
Konec r. 2013	455168	45768	406400	0

2) Banka poskytla podnikateli koncem roku 2010 úvěr ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 12 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech konstantních anuitách (stejných splátkách) vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2011, 2012 a 2013). Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

<u>Řešení:</u>

Příklad nejprve vyřešíme bez využití vzorce:

Výši splátky označíme s:

Konec roku 2011 před první splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$1000000\,Kč + 0{,}12 \cdot 1000000\,Kč = (1 + 0{,}12) \cdot 1000000\,Kč$$

Konec roku 2011 po první splátce:

$$(1 + 0{,}12) \cdot 1000000 - s$$

Konec roku 2012 před druhou splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$[(1 + 0{,}12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0{,}12)$$

Konec roku 2012 po druhé splátce:

$$[(1 + 0{,}12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0{,}12) - s$$

Konec roku 2013 před poslední splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$\{[(1 + 0{,}12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0{,}12) - s\} \cdot (1 + 0{,}12)$$

Konec roku 2013 po druhé splátce:

$$\{[(1 + 0{,}12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0{,}12) - s\} \cdot (1 + 0{,}12) - s$$

Po třetí splátce již musí být úvěr splacen, tedy musí platit rovnice:

$$\{[(1 + 0{,}12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0{,}12) - s\} \cdot (1 + 0{,}12) - s = 0$$

$$[(1{,}12 \cdot 1000000 - s) \cdot 1{,}12 - s] \cdot 1{,}12 - s = 0$$

$$(1{,}12^2 \cdot 1000000 - 1{,}12s - s) \cdot 1{,}12 - s = 0$$

$$1{,}12^3 \cdot 1000000 - (1{,}12^2 s + 1{,}12s + s) = 0$$

$$1{,}12^3 \cdot 1000000 - s(1{,}12^2 + 1{,}12 + 1) = 0$$

$$s = \frac{1{,}12^3 \cdot 1000000}{1{,}12^2 + 1{,}12 + 1}$$

$$\underline{\underline{s \cong 416349\,Kč}}$$

Rovnici jsme upravili a vyjádřili z ní neznámou s. Vypočítali jsme, že anuitní splátka bude činit 416349 Kč.

Pozn.: Využili jsme zaokrouhlení na koruny (na nejbližší měnovou jednotku v oběhu), ale samozřejmě v případě bezhotovostní platby by bylo možné zaokrouhlování i na haléře a záleželo by na smluvních podmínkách.

Celkově tak podnikatel zaplatí částku:

$$3s = 3 \cdot 416349 = 1249047\ Kč$$

Na úrocích tak zaplatil:

$$1249047\, Kč - 1000000\, Kč = 249047\, Kč$$

Nyní (pro ověření správnosti našeho výpočtu) využijeme vzorec pro výpočet anuity: Obecně pokud banka poskytne klientovi úvěr V s úrokovou mírou i při úrokovacím období t dnů a dlužník splatí úvěr n anuitami, jež budou spláceny jednou za úrokovací období, pak výši anuitní splátky vypočítáme:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1-\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1000000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{360}{360}}{1-\left(1+0{,}12\cdot\frac{360}{360}\right)^{-3}} = \frac{1000000 \cdot 0{,}12}{1-1{,}12^{-3}} \cong 416349$$

3) Banka poskytla podnikateli úvěr na 10 let ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 9 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku.
    a. Urči výši jedné splátky (zaokrouhlené na Kč).
    b. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Řešení:

a. Opět bylo možné využít odvození z minulého příkladu, nyní však rovnou využijeme vzorec pro výpočet výše anuity:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1-\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1000000 \cdot 0{,}09}{1-(1+0{,}09)^{-10}} \cong 155820$$

$$s \cong 155820\, Kč$$

Výše jedné splátky je 155820 Kč.

b. Celkem podnikatel zaplatí 10 splátek po 155820 Kč, tedy 1558200 Kč.
   Na úrocích tedy zaplatí 1558200-1000000=558200 Kč.

4) Pan Veselý získal hypoteční úvěr ve výši 1500000 Kč na dobu 15 let a roční úrokovou mírou 5,5 % fixovanou na celou dobu splácení. Úvěr bude splácet měsíčními anuitami.
    a. Urči výši anuity (zaokrouhlené na Kč) a celkovou částku, kterou pan Veselý bance měsíčními anuitami splatí. Kolik by zaplatil na úrocích?
    b. Urči výši anuity v případě, že by pan Veselý měl daný úvěr na 30 let a částku, kterou by celkem zaplatil. Kolik by zaplatil na úrocích?
    c. O kolik více zaplatí pan Veselý na úrocích při delší době splácení?

a. Opět využijeme vzorec pro anuitní splátku a dosadíme:
$V = 1500000\,Kč,\ i = 0{,}055,\ t = 30,\ n = 12 \cdot 15 = 180$

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1500000 \cdot 0{,}055 \cdot \frac{30}{360}}{1 - \left(1 + 0{,}055 \cdot \frac{30}{360}\right)^{-180}} \cong 12256$$
$s = 12256\ Kč$

Výše anuity je tedy 12256 Kč.

Celkově klient bance zaplatí 180 splátek po 12256 Kč, tedy
$180 \cdot 12256\ Kč = 2206080\ Kč$

Na úrocích zaplatí:
$(2206080 - 1500000)Kč = 706080\,Kč$

b. Kdyby pan Veselý získal stejný úvěr na 30 let, pak by platilo:
$V = 1500000\,Kč,\ i = 0{,}055,\ t = 30,\ n = 12 \cdot 30 = 360$
$$s_1 = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1500000 \cdot 0{,}055 \cdot \frac{30}{360}}{1 - \left(1 + 0{,}055 \cdot \frac{30}{360}\right)^{-360}} \cong 8517$$
$s_1 = 8517\ Kč$

Výše anuity tedy byla 8517 Kč.

Celkově by pan Veselý zaplatil 360 splátek po 8517 Kč, tedy
$360 \cdot 8517\ Kč = 3066120\ Kč$

Na úrocích by zaplatil:
$(3066120 - 1500000)Kč = 1566120\,Kč$

c. Rozdíl ve výši úroků v jednotlivých variantách je $(1566120 - 706080)Kč = 860040\,Kč$

Při delší době splácení by pan Veselý na úrocích zaplatil o 860040 Kč více.

5) Pan Nový je schopen každoročně po dobu deseti let na konci roku splácet částku 50000 Kč. Jak velkou půjčku si může vzít na roční úrok 15 %?

<u>Řešení:</u>

Opět vyjdeme ze vzorce pro výpočet konstantní anuity a z něho vyjádříme proměnnou V:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1-\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{V \cdot i \cdot \frac{360}{360}}{1-\left(1+i\cdot\frac{360}{360}\right)^{-n}}$$

$$s = \frac{V \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$V = \frac{s[1-(1+i)^{-n}]}{i} = \frac{50000 \cdot (1-1{,}15^{-10})}{0{,}15} \cong 250938$$

$$\underline{\underline{V = 250938\,K\check{c}}}$$

Úlohy k procvičení:

1) Pan Novák získal od banky začátkem roku úvěr na čtyři roky, který splatí ve čtyřech ročních splátkách. Banka úročí jednou ročně. Zde je jeho neúplný umořovací plán:

	Splátka [Kč]	Úrok [Kč]	Úmor [Kč]	Stav dluhu [Kč]
Počáteční stav	-	-	-	2000000
Konec 1. roku	700000	300000		
Konec 2. roku	600000			
Konec 3. roku	500000			
Konec 4. roku				

   a. Vypočtěte z tabulky výši úrokové míry úvěru.
   b. Doplňte nevyplněné údaje umořovacího plánu.
   c. Určete výši poslední splátky.
   d. Kolik pan Novák zaplatí bance celkem?
   e. Kolik činí celkem úrok?

[a. 15 %; b. viz tabulka níže, 1064900 Kč; 2864900 Kč; 864900 Kč]

	Splátka [Kč]	Úrok [Kč]	Úmor [Kč]	Stav dluhu [Kč]
Počáteční stav	-	-	-	2000000
Konec 1. roku	700000	300000	400000	1600000
Konec 2. roku	600000	240000	360000	1240000
Konec 3. roku	500000	186000	314000	926000
Konec 4. roku	1064900	138900	926000	0

2) Pan Novák získal od banky půjčku vy výši 300000 Kč na roční úrok 14 %. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li pan Novák splatit dluh za 5 let?

[85385 Kč]

3) Pan Marek je schopen každoročně po dobu patnácti let na konci roku splácet částku 60000 Kč.
   a. Jak velkou půjčku si může vzít na roční úrok 9 %?
   b. Kolik zaplatí celkem na úrocích?

[a. 483641 Kč, b. 416359 Kč]

4) Neklapilovi získali hypotéční úvěr ve výši 1500000 Kč na dobu 15 let. Úroková míra bude po celou dobu splácení 7,5 %.
   a. Jaká bude výše splátky v případě, že budou úvěr splácet měsíčními anuitami, kolik v tomto případě bance zaplatí celkem za 15 let?
   b. Jaká bude výše anuity a kolik bance zaplatí celkem za 15 let v případě, že budou úvěr splácet ročními anuitami.

[a. 13905 Kč; 2502900 Kč, b. 169931 Kč; 2548965 Kč]

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich.: *Matematika pro gymnázia- Posloupnosti a řady*. 1 vydání. Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-91-7.

ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. 1. vydání.* Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-303-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.