Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

FINANČNÍ MATEMATIKA- SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Autor	Hana Macholová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	20. 4. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá využití složeného úrokování a chápe vztah mezi složeným úrokováním a geometrickou posloupností.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Poznámka:

Při výpočtech budeme používat následující označení:

K_0 – počáteční (vložený) kapitál
K_n – kapitál na konci n-tého úrokovacího období
i – úroková míra vyjádřená desetinným číslem
k – zdaňovací koeficient
u – daň z úroku vyjádřená v procentech
t – délka úrokovacího období vyjádřená ve dnech
n – počet úrokovacích období
U_1 – úrok po zdanění za jedno úrokovací období
U_n – úrok po zdanění na konci n-tého úrokovacího období

Budeme využívat tzv. německý standard 30E/360, což je metoda určování délky úrokovacího období, kdy počítáme, že každý měsíc má 30 dnů, tedy rok má 360 dnů.

V tomto učebním materiálu se budeme věnovat složenému úrokování, kdy banka úroky připíše k jistině a v dalším období platí i úroky také z nich.

Využijeme zejména následující vztahy:

$$k = \frac{100 - u}{100}$$

$$U_1 = K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360}$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

$$U_n = K_n - K_0 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - K_0 = K_0 \left[\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1\right]$$

Samozřejmě v případě, že úrokovací období bude jeden rok, můžeme ze vztahů zlomek $\frac{t}{360}$ vynechat, protože když dosadíme za t = 360, pak dostaneme zlomek $\frac{360}{360} = 1$.

Řešené úlohy:

1) Pan Novák uložil 48 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2,5 %. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Jakou částku (po zdanění 15 %) zaplatí banka panu

Novákovi na úrocích za jeden rok? Pan Novák bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka připisuje ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

$K_0 = 48000\ Kč$

$i = 0{,}025$

$k = 0{,}85$

$t = 360$

Úrok po zdanění za 1 rok:

$U_1 = K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} = 48000 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}025 \cdot 1 = 1020$

$U_1 = 1020\ Kč$

Majetek pana Nováka na konci jednotlivých roků:

po prvním roce:

$K_1 = K_0 + U_1 = 48000 + 48000 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}025 \cdot 1 = 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) = 49020$

$K_1 = 49020\ Kč$

po druhém roce:

$K_2 = K_1 + U_2 = 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) + 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}025 =$

$= 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85) = 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)^2 \cong 50061{,}70$

$K_2 = 50061{,}70\ Kč$

po třetím roce:

$K_3 = K_2 + U_3 = 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)^2 + 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)^2 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}025 =$

$= 48000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85)^2 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025) = 48000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025)^3 \cong 51125{,}50$

$K_3 = 51125{,}50\ Kč$

po čtvrtém roce:

$K_4 = K_3 + U_4 == 48000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025)^4 \cong 52211{,}90$

$K_4 = 52211{,}90\ Kč$

po pátém roce:

$K_5 = K_4 + U_5 == 48000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025)^5 \cong 53321{,}40$

$K_5 = 53321{,}40\ Kč$

2) Pan Novák uložil 48 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2,5 %. Jakou částku našetří Pan Novák za pět let?
   a. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc.
   b. Úrokovací období vkladu je 1 den.

$K_0 = 48000\ Kč$

$k = 0{,}85$

$\underline{i = 0{,}025}$

a. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc:

$t = 30$

$n = 5 \cdot 12 = 60$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n = 48000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{30}{360}\right)^{60} \cong 53375{,}80$$

$K_n \cong 53375{,}80\ Kč$

Pan Novák za pět let našetří při měsíčním úrokování částku 53 375,80 Kč.

b. Úrokovací období vkladu je 1 den:

$t = 1$

$n = 5 \cdot 360 = 1800$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n = 48000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{1}{360}\right)^{1800} \cong 53380{,}60$$

$K_n = 53380{,}60\ Kč$

Pan Novák za pět let našetří při denním úrokování částku 53 375,60 Kč.

3) Jaká by musela být úroková míra v předchozím příkladu při úrokovacím období jeden měsíc, aby pan Novák našetřil 55 000 Kč?

$K_0 = 48000\ Kč$

$K_n = 55000\ Kč$

$k = 0{,}85$

$t = 30$

$\underline{n = 5 \cdot 12 = 60}$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

Odtud vyjádříme i:

$$\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$k \cdot i \cdot \frac{t}{360} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$i = \frac{360 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right)}{k \cdot t}$$

$$i = \frac{360 \cdot \left(\sqrt[60]{\frac{55000}{48000}} - 1\right)}{0{,}85 \cdot 30} \cong 0{,}0321$$

Aby pan Novák z vložených 48 000 Kč za pět let ušetřil 55 000 Kč při měsíčním úrokování a patnáctiprocentním zdanění úroků, musela by být úroková míra rovna přibližně 0,0321, tedy 3,21 %.

4) Kolik peněz musí paní Nová uložit, aby při ročním úročení 8,5 % měla za pět let 25 000 Kč. Přitom daň z úroků je 15 %.

$K_0 = ?\ Kč$

$K_n = 25000\ Kč$

$i = 0{,}085$

$k = 0{,}85$

$t = 360$

$\underline{n = 5}$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

Odtud vyjádříme K_0:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

$$K_0 = \frac{25000}{(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}085 \cdot 1)^5}$$

$$K_0 \cong 17638{,}40\ Kč$$

Paní Nová musí uložit přibližně 17 638,40 Kč.

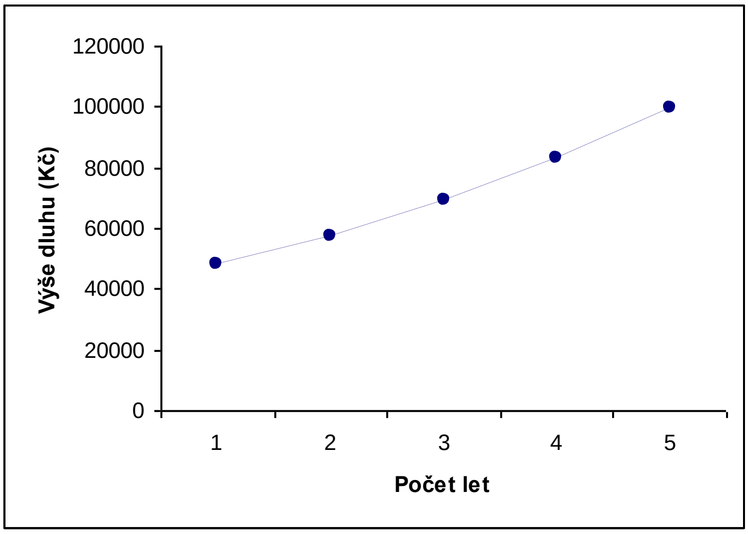
5) Pan Lukášek si půjčil 40 000 Kč s úrokovou mírou 20 % a s ročním úročením (poprvé dochází k úročení rok od získání půjčky), jde o složené úročení.
   a. Zakreslete do Kartézské soustavy souřadnic prvních pět členů posloupnosti, která vyjadřuje závislost výše dluhu na počtu let jeho trvání.
   b. Určete, zda je posloupnost geometrická a pokud ano, zapište první člen a kvocient.

   a. Zapíšeme do tabulky prvních pět členů posloupnosti, jež získáme ze vzorce:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

$$K_n = 40000 \cdot 1{,}2^n$$

Počet let	1	2	3	4	5
Výše dluhu (v Kč)	48000	57600	69120	82944	99532,80



b. Ano, uvedená posloupnost je geometrická, její první člen je 48 000 a kvocient je roven 1,2.

Úlohy k procvičení:

1) Pan Novák vloží na začátku roku do banky 50 000 Kč s úrokovou mírou 8 % a ročním úročením.
    a. Jakou částku by měl na vkladovém účtu za jeden rok, kdyby nemusel platit daň z úroků?
    b. Kolik korun bude mít k dispozici za jeden rok, pokud mu bude odečtena daň z úroků ve výši 15 %?
    c. Kolik korun by měl na účtu po čtyřech letech, kdyby nemusel platit daň z úroků?
    d. Jakou částku bude mít k dispozici na účtu po čtyřech letech, jestliže na konci každého roku mu bude odečtena daň z úroků ve výši 15 %?

[a. 54 000 Kč; b. 53 400 Kč; c. 68 024,40 Kč; d. 65 051,20 Kč]

2) Paní Dvořáková vloží na termínovaný účet 10 000 Kč. Kolik peněz na něm bude mít po jednom roce, jestliže jí úrok ve výši 9 % banka připisuje:
    a. Ročně
    b. Čtvrtletně
    c. Měsíčně

   Přitom zdanění úroků je 15 %.

[a. 10 765 Kč; b. 10 787,20 Kč; c. 10 792,40 Kč]

3) Pan Kudrna požaduje, aby se jeho vklad 10 000 Kč zvýšil za 2 roky na 15 000 Kč. Přitom ukládá svůj kapitál na termínovaný vklad na dva roky při měsíčním úročení a patnáctiprocentním zdanění úroků a složeném úrokování. Jaká by musela být úroková míra, aby byl jeho požadavek splněn?

[0,2406]

4) Půjčka 50 000 Kč byla poskytnuta s úrokovou mírou 20 %, s ročním úročením, poprvé se úročí po roce od jejího poskytnutí a jde o složené úrokování.
    a. Vypište prvních pět členů posloupnosti, která vyjadřuje závislost celkového úroku U_n na počtu let trvání půjčky.
    b. Zjistěte, zda posloupnost $U_1, U_{2,}, \ldots, U_n$ je geometrická.

[a. 10 000, 22 000, 36 400, 53 680, 74 416, b. Není, protože $\frac{U_2}{U_1} = 2,2; \frac{U_3}{U_2} \cong 1,65$]

5) Podnikatel chce na začátku roku získat od banky úvěr na jeden rok s jednorázovou splatností (po jednom roce). Banka mu nabízí úvěr 12,4 % a se čtvrtletním úročením (vždy na konci kalendářního čtvrtletí). Jde o složené úročení. Banka přitom poskytuje úvěry pouze v celých desetitisících korun. Podnikatel předpokládá, že za rok bude mít na splacení dluhu k dispozici 4 miliony korun. Kolik si může nejvýše vypůjčit, aby koncem roku splatil celý dluh?

[3 540 000 Kč]

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich.: *Matematika pro gymnázia- Posloupnosti a řady*. 1 vydání. Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-91-7.

ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. 1. vydání.* Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-303-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.