evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

BINOMICKÉ ROVNICE

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	9. 1. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá řešení binomických rovnic, jejich kořeny umí vyjádřit a goniometrickém i algebraickém tvaru a graficky je znázornit v Gaussově rovině
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Teorie:

Binomická rovnice je každá rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru:

$$x^n - a = 0, x \in C, a \in C, n \in N, n > 1$$

Kořeny určíme podle vztahu:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Obrazy kořenů binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $r = \sqrt[n]{|a|}$.

Řešené příklady:

1) Řešte rovnici $x^6 - 64 = 0$.

Řešení:

I. způsob:

Rovnici vyřešíme algebraicky tak, že její levou stranu rozložíme v součin.

$x^6 - 64 = x^6 - 2^6 = (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Získáme rovnici v součinovém tvaru.

$(x-2)(x^2 + 2x + 4)(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

Odtud plyne:

a) $(x-2) = 0$, *čili* $x_1 = 2$

b) $(x^2 + 2x + 4) = 0$, *čili* $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$

c) $(x+2) = 0$, *čili* $x_4 = -2$

d) $(x^2 - 2x + 4) = 0$, *čili* $x_{5,6} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

II. způsob:

Rovnici budeme řešit goniometricky. 64 převedeme na pravou stranu rovnice a vyjádříme v goniometrickém tvaru.

$64 = 64(\cos 0 + i\sin 0)$

Podle vztahu z teorie pro určení kořenů binomické rovnice platí:

$$x_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right), k = 0; 1; 2; 3; 4; 5$$

$x_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$

$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$x_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$x_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$

$$x_4 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$
$$x_5 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

---

2) V množině komplexních čísel řešte rovnici $\boldsymbol{(z^3 - i)(z^5 - 1) = 0}$ a kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

Řešení:
Jedná se o rovnici v součinovém tvaru, musíme tedy vyřešit dvě binomické rovnice.
a)
$$z^3 - i = 0$$
$$z^3 = i$$
$$z^3 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi + 4k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right), k = 0; 1; 2$$

$$z_0 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$z_1 = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$z_2 = \left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$
Tyto kořeny tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka, který je vepsán do kružnice o poloměru 1. (na obr. znázorněn hnědě)

b)
$$z^5 - 1 = 0$$
$$z^5 = 1$$
$$z^5 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$
$$z_k = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right), k = 0; 1; 2; 3; 4$$

$$z_0 = (\cos 0 + i\sin 0) = 1$$
$$z_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right) = (\cos 72° + i\sin 72°)$$
$$z_2 = \left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right) = (\cos 144° + i\sin 144°)$$
$$z_3 = \left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right) = (\cos 216° + i\sin 216°)$$
$$z_4 = \left(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}\right) = (\cos 288° + i\sin 288°)$$
Tyto kořeny tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníka, který je vepsán do kružnice o poloměru 1. (na obr. znázorněn zeleně)

Grafické znázornění v Gaussově rovině:

---

3) V množině komplexních čísel řešte rovnici $\boldsymbol{x^4(3-2i)+2+3i=0}$ a kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

Řešení:

Rovnici upravíme.

$$x^4=\frac{-2-3i}{3-2i}$$

Na pravé straně nejdříve určíme podíl dvou komplexních čísel.

$$\frac{-2-3i}{3-2i}=\frac{(-2-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-6-9i-4i+6}{13}=-i$$

Získáme binomickou rovnici. Tu budeme řešit goniometricky.

$$x^4=-i$$

$$x^4=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$x_k=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)=\left(\cos\frac{3\pi+4k\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi+4k\pi}{8}\right),k=0;1;2;3$$

$$x_0=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$$

$$x_1=\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$$

$$x_2=\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}$$

$$x_3=\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}$$

Grafické znázornění kořenů v Gaussově rovině:

---

4) Je dán pravidelný pětiúhelník se středem v počátku, jedním jeho vrcholem je obraz komplexního čísla -2i. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou zbývající vrcholy pětiúhelníka.

Řešení:
Komplexní číslo -2i a ostatní komplexní čísla jsou kořeny binomické rovnice:
$z^5 = (-2i)^5 \iff z^5 = -32i$
Rovnici řešíme goniometricky.
$z^5 = -32i$
$z^5 = 32\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
$z_k = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi + 4k\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{10}\right),$
$k = 0; 1; 2; 3; 4$

$z_0 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$
$z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$
$z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}\right)$
$z_3 = 2\left(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
$z_4 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}\right)$

Příklady k procvičování:

1) V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^3 + 2 = 0$. Kořeny vyjádřete v goniometrickém i algebraickém tvaru.

správné řešení:

$$x_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[6]{108}}{2}i$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = \sqrt[3]{2}(-1 + i0) = -\sqrt[3]{2}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \frac{\sqrt[6]{108}}{2}i$$

2) V množině komplexních čísel řešte rovnici $(z^4 + 16)(z^3 - 8i) = 0$. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

správné řešení:

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

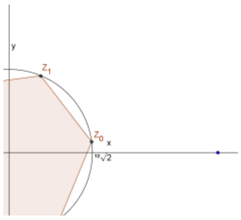
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i) = -2i$$

3) V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^6 \cdot i + 1 - i = 0$ a kořeny znázorněte v Gaussově rovině.
správné řešení:
absolutní hodnota všech kořenů je $\sqrt[12]{2}$, jejich argumenty jsou $\frac{\pi}{24}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{17\pi}{24}$; $\frac{25\pi}{24}$; $\frac{11\pi}{8}$; $\frac{41\pi}{24}$



4) Je dán pravidelný devítiúhelník se středem v počátku, jedním jeho vrcholem je obraz komplexního čísla 3i. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou zbývající vrcholy devítiúhelníka.
správné řešení:
zbývající vrcholy jsou obrazy komplexních čísel s argumenty $\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{13\pi}{18}$; $\frac{17\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{18}$; $\frac{29\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{6}$ a absolutní hodnotou 3

Použité zdroje a literatura:

CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.