Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	9. 12. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem komplexní čísla a umí jej aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Komplexní čísla

Příklad 1

Dokažte, že podíl $\frac{m-2i}{2+mi}$ nezávisí na $m \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

Zadaný podíl upravíme podle pravidel pro počítání s komplexními čísly, tedy

$$\frac{m-2i}{2+mi} = \frac{m-2i}{2+mi} \cdot \frac{2-mi}{2-mi} = \frac{\cancel{2m} - 4i - m^2 i + \cancel{2mi^2}}{4 - m^2 i^2} = \frac{-i \cdot \cancel{(4+m^2)}}{\cancel{4+m^2}} = \boldsymbol{-i}$$

Zadaný výraz tedy vychází pro libovolné $m \in \boldsymbol{R}$ stále – i a na volbě m nezáleží.

Příklad 2

Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo $z = \sin 60° - i \cos 60\,°$.

Řešení:

Nejprve si komplexní číslo vyčíslíme, tedy $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i$. Potom již

$|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = -\frac{1}{2}$ a argument $\varphi = \frac{11}{6}\pi$.

Proto

$$\boldsymbol{z = cos\, \frac{11}{6}\pi + i\, sin\, \frac{11}{6}\pi}$$

Příklad 3

Určete $n \in \boldsymbol{N}$ tak, aby platilo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Řešení:

Výraz na levé straně upravíme na goniometrický tvar a umocníme pomocí Moivreovy věty. Takže:

$|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$; $\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2}$; $\varphi = \frac{1}{6}\pi$; $z = cos\, \frac{1}{6}\pi + i\, sin\, \frac{1}{6}\pi$

a podle Moivreovy věty je

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = 1^n \cdot \left(\cos n \cdot \frac{\pi}{6} + i \sin n \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Dále řešíme soustavu goniometrických rovnic

$$\cos n \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin n \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Řešením této soustavy jsou všechna $n \in \boldsymbol{N}$, pro která platí $n = 12\, k + 1$; $k \in \boldsymbol{N}_0$.

Příklad 4

Vypočítejte součet čtvrtých mocnin všech třetích odmocnin z čísla 1.

Řešení:

Nejprve určíme všechny třetí odmocniny z komplexního čísla $z = 1$. Toto číslo zapíšeme v goniometrickém tvaru

$$z = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

Pro jeho třetí odmocniny platí

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0}{3}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0}{3}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \text{ kde } k = 0, 1, 2.$$

Po dosazení za konkrétní k dostáváme čísla

$$z_0 = (\cos 0 + i \sin 0) = 1$$
$$z_1 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = (\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Pozn.: Uvedení komplexních čísel v algebraickém tvaru je nyní zbytečné. Zde je jen pro úplnost. Máme totiž ještě vypočítat čtvrté mocniny a pro tuto operaci se více hodí goniometrický tvar komplexního čísla a Moivreova věta. Pro zájemce uvádím, že čtvrté mocniny můžeme určit i pomocí binomické věty.)

Tedy

$$(z_0)^4 = \cos 4 \cdot 0 + i \sin 4 \cdot 0 = 1$$
$$(z_1)^4 = \cos 4 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$(z_2)^4 = \cos 4 \cdot \frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{16\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Proto

$$(z_0)^4 + (z_1)^4 + (z_2)^4 = 1 - \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{0}\,.$$

(Pozn.: Úlohu šlo řešit i zakreslením odmocnin z čísla 1 *a jejich čtvrtých mocnin do Gaussovy roviny. Následně bychom počítali s těmito čtvrtými mocninami jako s vektory a výslednicí by byl nulový vektor. Nebo fyzikální interpretace – počítání s fázory (2. roč. Mechanické kmitání)).*

Úlohy k procvičení

1. Dokažte, že pro každé reálné číslo p je komplexní číslo $z = \frac{i}{p-3i} + \frac{i}{p+3i}$ ryze imaginární.

$$\left[Po\ úpravě\ komplexního\ čísla\ získáme\ \ z = i \cdot \frac{2p}{p^2+9}, což\ je\ číslo\ ryze\ imaginární\right]$$

2. Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo $z = \sin 30° + i \cos 30\,°$.

$$\left[z = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right]$$

3. Určete $n \in \boldsymbol{N}$ tak, aby platilo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

$$[n = 12k + 1, k \in \boldsymbol{N}_0]$$

4. Vypočítejte součet třetích mocnin všech čtvrtých odmocnin z čísla 1.

$$[0]$$

5. Vypočítejte součet všech třetích komplexních odmocnin z čísla –2.

$$[0]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.