Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ÚLOHY DIFERENCIÁLNÍHO A INTEGRÁLNÍHO POČTU S FYZIKÁLNÍM NÁMĚTEM

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	4. duben 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá úlohy infinitezimálního počtu s fyzikálním námětem
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Úlohy diferenciálního a integrálního počtu s fyzikálním námětem

Příklad 1

Hmotný bod koná přímočarý pohyb tak, že pro dráhu $s(t)$ uraženou za dobu t (od počátečního okamžiku $t_0 = 0$ s) platí rovnice $s(t) = 3\,t^2 + 50\,t + 10$. Určete velikost okamžité rychlosti tohoto nerovnoměrného pohybu v čase t a její hodnoty v okamžicích $t_1 = 1$ s a $t_2 = 8$ s.

Řešení

Hledaná velikost okamžité rychlosti nerovnoměrného pohybu je první derivací dráhy podle času, tedy

$$v(t) = s'(t) = 6\,t + 50$$

V čase $t_1 = 1$ s je $v(t_1) = 56\,m \cdot s^{-1}$ a v čase $t_2 = 8$ s je $v(t_2) = 98\,m \cdot s^{-1}$.

Příklad 2

K baterii o elektromotorickém napětí $10V$ a vnitřním odporu 2 Ω je připojený spotřebič. Při jakém odporu spotřebiče bude jeho příkon maximální?

Řešení

$U_e = 10\ V, R_i = 2\ \Omega; R = ?$ pro P_{max}

Ohmův zákon pro uzavřený obvod napíšeme ve tvaru $U_e = (R_i + R) \cdot I$ a vztah pro výkon proudu v tomto obvodu je

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} = \frac{(R_i + R)^2 \cdot I^2}{R}$$

Tento vztah zderivujeme podle R (vzhledem k němu určujeme maximální příkon). Tedy

$$P'(R) = \frac{2 \cdot (R_i + R) \cdot I^2 \cdot R - (R_i + R)^2 \cdot I^2}{R^2} = \frac{(2R_iR + 2R^2 - R_i^2 - 2R_iR - R^2) \cdot I^2}{R^2} =$$

$$= \frac{(R^2 - R_i^2) \cdot I^2}{R^2} = \frac{(R - R_i) \cdot (R + R_i) \cdot I^2}{R^2}$$

Nyní tuto derivaci položíme rovnu 0 a určíme extrémy funkce P(R). Získáváme dvě řešení a to $R = -R_i$ a $R = R_i$. První řešení nemá fyzikální smysl můžeme uvažovat pouze druhé řešení, tedy maximální příkon bude při R = 2 Ω.

Příklad 3

Určete, kdy jsou si nejblíže předmět a skutečný obraz vytvořený spojnou čočkou o dané ohniskové vzdálenosti f.

Řešení

Nejdříve provedeme přeznačení veličin, aby nedošlo k záměně nebo mýlce při určování derivace.

$a_1 = a$ … předmětová vzdálenost, $a_2 = a'$ … obrazová vzdálenost

Podle zadání mají být předmět a obraz co nejblíže. Proto si označíme $h = a_1 + a_2$ a budeme hledat extrémy funkce h v závislosti na a_1 nebo na a_2.

Pro zobrazování čočkou platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2},$$

odkud si vyjádříme např. neznámou a_2 pomocí druhé neznámé a_1. Tedy

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot f}{a_1 - f}$$

dosadíme do funkce h

$$h = a_1 + a_2 = a_1 + \frac{a_1 \cdot f}{a_1 - f} = \frac{a_1^2}{a_1 - f}$$

a budeme derivovat podle a_1. Takže

$$h'(a_1) = \frac{2a_1 \cdot (a_1 - f) - a_1^2}{(a_1 - f)^2} = \frac{a_1^2 - 2a_1 f}{(a_1 - f)^2} = \frac{a_1 \cdot (a_1 - 2f)}{(a_1 - f)^2}$$

Tato derivace nabývá svého minima pro $a_1 = 0$ – ale to nemá fyzikální smysl, nebo pro $a_1 = 2f$ a to už smysl má. Zbývá dopočítat obrazovou vzdálenost a dostaneme výsledek $a_2 = 2f$.

Předmět a skutečný obraz mají nejmenší vzdálenost pro předmětovou vzdálenost $2f$, obraz se nachází ve vzdálenosti $2f$ od čočky.

Příklad 4

Určete práci potřebnou k vynesení družice o hmotnosti 250 kg do výšky 300 km nad povrch Země. Hmotnost Země je M = 5,98 $\cdot 10^{24}$ kg, poloměr Země R = 6378 km a gravitační konstanta κ = 6,67$\cdot 10^{-11}$ N$\cdot$m^2 $\cdot$kg^{-2} . Při řešení neuvažujte kinetickou energii družice.

Řešení

Z Newtonova gravitačního zákona vyplývá pro velikost gravitační síly vztah

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Pro velikost práce, kterou budeme konat proti působení gravitační síly, platí

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Proto stačí dosadit a získáme

$$W = \int_R^{R+h} F_g(r)dr = \int_R^{R+h} \kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\, dr = \left[-\kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r}\right]_R^{R+h} = \kappa \cdot \frac{m \cdot M}{R} - \kappa \cdot \frac{m \cdot M}{R+h} =$$

$$= \kappa \cdot \frac{m \cdot M \cdot h}{R \cdot (R+h)} = \cdots = \mathbf{7,4\ \cdot 10^8}$$

Je potřeba vykonat práci 7,4$\cdot 10^8$ J.

Příklad 5

Určete dráhu s, kterou urazí hmotný bod při přímočarém pohybu rovnoměrně zrychleném se zrychlením a, je-li v čase $t = 0\, s$ jeho velikost rychlosti $v(0) = v_0$ a dráha $s(0) = s_0$.

Řešení

Dráha s tělesa (nebo hmotného bodu) při jeho přímočarém pohybu v časovém intervalu $\langle t_1;\ t_2 \rangle$ s rychlostí o velikosti $v = v(t)$ je daná vztahem

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

V našem případě bude

$$s = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (at + v_0)dt = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right]_0^t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + c,$$

kde $c = s_0$.

Příklady k procvičení

1. Silnice, která má šířku 8 m, je osvětlovaná lampou, která je nad osou silnice. V jaké výšce nad silnicí musí být lampa, aby byl okraj silnice co nejvíce osvětlený?

$$\left[2\sqrt{2}\,m\right]$$

2. Základna nakloněné roviny má délku *d*. Určete výšku nakloněné roviny (při konstantním *d*) tak, aby kulička o hmotnosti *m* sjela z vrcholu nakloněné roviny v co nejkratším čase. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

$$[h = d]$$

3. Určete práci W vykonanou silou o velikosti $F(x) = kx$ $(k = 500\ N \cdot m^{-1})$ při vychýlení tělesa na pružině z polohy $a = 0{,}1\ m$ do polohy $b = 0{,}2\ m.$

$$\left[\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{0,1}^{0,2} = 7{,}5\ J\right]$$

4. Vypočítejte dráhu, kterou urazí hmotný bod mezi první a čtvrtou sekundou svého pohybu, mění-li se jeho rychlost podle vztahu $v(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$.

$$\left[3\left[2\sqrt{t}\right]_1^4 = 6\ m\right]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-363-9.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.