Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

UŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU PŘI VÝPOČTU OBSAHU ROVINNÝCH ÚTVARŮ A OBJEMU ROTAČNÍCH TĚLES

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	15. 3. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem určitého integrálu a umí jej aplikovat při výpočtu obsahu rovinných útvarů
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Užití určitého integrálu při výpočtu obsahu rovinných útvarů a objemu rotačních těles

Úvod

1. Pro obsah rovinného $\boldsymbol{S}$ útvaru U omezeného osou x o rovnici $y = 0$, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojité nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ použijeme vztah

$$\boldsymbol{S}\,(U) = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Nabývá-li integrovaná funkce f v intervalu $\langle a; b\rangle$ nekladných hodnot, pak $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Proto pro obsah útvaru U platí vztah

$$\boldsymbol{S}(U) = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

3. Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí f, g a přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$ nebo jen grafy spojitých funkcí f, g vypočteme pomocí vztahu

$$\boldsymbol{S}(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

4. Rotací útvaru U omezeného osou x o rovnici $y = 0$, přímkami o rovnicích $x = a$, $y = b$ a grafem spojité nezáporné funkce $f\,(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ okolo osy x vznikne rotační těleso. Jeho objem určíme užitím vztahu

$$\boldsymbol{V} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Příklad 1

Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je omezený grafy funkcí $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = \frac{x}{4}$.

Řešení

Nejprve určíme x- ové souřadnice průsečíků obou grafů. Získáme je řešením rovnice $\sqrt{x} = \frac{x}{4}$ a dále tím získáme dolní a horní mez určitého integrálu. Tedy

$$\sqrt{x} = \frac{x}{4}$$

$$x = \frac{x^2}{16}$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 16$$

V intervalu $\langle 0; 16\rangle$ je graf funkce f nad grafem funkce g a proto od plochy pod grafem funkce f musíme odečíst plochu pod grafem funkce g. Tedy:

$$\boldsymbol{S}(U) = \int_0^{16}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{4}\right)dx = \left[\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{16} - \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^{16} = \frac{2}{3}\sqrt{16^3} - \frac{16^2}{8} = \boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

Příklad 2

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f: y = \sin x$ v intervalu $\langle 0;\ \pi \rangle$ a osou *x*.

Řešení

Obsah tohoto obrazce je

$$\boldsymbol{S}(U) = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 0 + 1 = \mathbf{1}$$

Příklad 3

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f: y = 3 - x^2; g: y = 2x$.

Řešení

Nejprve určíme *x*- ové souřadnice průsečíků obou grafů. Získáme je řešením rovnice $3 - x^2 = 2x$ a dále tím získáme dolní a horní mez určitého integrálu. Tedy

$$3 - x^2 = 2x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3) \cdot (x - 1) = 0$$

$$x_1 = -3;\ x_2 = 1$$

V intervalu $\langle -3; 1 \rangle$ je graf funkce *f* nad grafem funkce *g* a proto od plochy pod grafem funkce *f* musíme odečíst plochu pod grafem funkce *g*. Tedy:

$$\boldsymbol{S}(U) = \int_{-3}^{1} [(3 - x^2) - 2x] \, dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-3}^{1} = \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - (-9 + 9 - 9) = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}$$

Příklad 4

Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru omezeného křivkou $f: y = 1 + \cos x, x \in \langle 0;\ \pi \rangle$, okolo osy *x*.

Řešení

Objem tohoto tělesa vypočítáme

$$\boldsymbol{V} = \pi \int_0^\pi (1 + \cos x)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^\pi (1 + 2\cos x + cos^2 x) \, dx = \pi \left[x + 2\sin x + \frac{\cos x \cdot \sin x + x}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \pi \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\pi^2}$$

Úlohy k procvičení

1. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolou o rovnici $y = 2x^2 - 4x$ a osou *x*.

$$\left[\frac{8}{3}\right]$$

2. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f: y = x^2 - 1;\ g: y = x + 1$.

$$\left[\frac{9}{2}\right]$$

3. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f: y = \sin x\,; g: y = \cos x\,; x \in \langle 0;\ \frac{\pi}{4}\rangle$.

$$\left[\sqrt{2} - 1\right]$$

4. Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru omezeného křivkou $f: y = x^2 + 1, x \in \langle -2;\ 2\rangle$, okolo osy *x*.

$$\left[\frac{412\,\pi}{15}\right]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-363-9.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.