Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

NEURČITÝ INTEGRÁL

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	12. 3. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem neurčitého integrálu a umí jej aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Neurčitý integrál

Příklad 1

Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int (2x^4 + 4\,x + 6)\;dx$
b) $\int 2x^2(1-3x)dx$

Řešení:

a) Jedná se o základní integrál, při výpočtu využijeme primitivní funkci k funkci racionální. Tedy

$$\int (2x^4 + 4\,x + 6)\;dx = \int 2x^4 dx + \int 4x\;dx + \int 6\;dx =$$
$$= 2\int x^4\;dx + 4\int x\;dx + 6\int dx = 2\cdot\frac{1}{5}x^5 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + 6x + c =$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{5}x^5 + 2x^2 + 6x + c}$$

b) Tento integrál roznásobením integrandu převedeme také na základní integrál z racionální funkce. Tedy

$$\int 2x^2(1-3x)dx = \int (2x^2 - \;3x^3)\;dx = \int 2x^2\;dx - \int 3x^3\;dx =$$
$$= 2\int x^2 dx - 3\int x^3 dx = \boldsymbol{\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + c}$$

Příklad 2

Vypočítejte a proveďte zkoušku:

$$\int (sin^2x + \;cos^2x)\;dx$$

Řešení: Tento integrál snadno vyřešíme užitím goniometrických vzorců. Uvědomme si, že $sin^2x + \;cos^2x = 1$. Tím se celý výpočet zjednoduší a dostáváme tak

$$\int (sin^2x + \;cos^2x)\;dx = \int dx = \boldsymbol{x + c}$$

Příklad 3

Vypočítejte:

a) $\int 3x(x^2+5)^6\, dx$
b) $\int \cos x\,(\sin x - 4)^3\, dx$

Řešení: Při řešení obou integrálů využijeme metodu *substituce. Pozn.: U prvního integrálu bychom mohli využít i řešení umocnit, roznásobit a převést na racionální funkci.*

a) $\int 3x(x^2+5)^6\, dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2+5)^6 dx = \frac{3}{2}\int t^6 dt = \frac{3}{14}\, t^7 = \boldsymbol{\frac{3}{14}\,(x^2+5)^7 + c}$

$t = x^2 + 5$
$dt = 2x\, dx$

b) $\int \cos x\,(\sin x - 4)^3\, dx = \int t^3\, dt = \frac{1}{4}\, t^4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(\sin x - 4)^4 + c}$

$t = \sin x - 4$
$dt = \cos x\, dx$

Příklad 4

Vypočítejte:

a) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx$
b) $\int 2x\, \cdot \ln x\, dx$

Řešení: U obou integrálů použijeme metodu *per partes.*

a) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx =$

$$u = x^2 \quad v' = \cos x$$
$$u' = 2x \quad v = -\sin x$$

$$= -x^2 \sin x + 2\int x \sin x\, dx =$$

$$u = x \quad v' = \sin x$$

$$u' = 1 \quad v = \cos x$$

$$= -x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\, dx = \boldsymbol{-x^2 \sin x + 2x\cos x + 2\sin x + c}$$

b) $\int 2x\, \cdot \ln x\, dx = x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x^2 dx = x^2 \ln x - \int x\, dx = \boldsymbol{x^2 \ln x - \frac{1}{2}\, x^2 + c}$

$u = \ln x \quad v' = 2x$

$u' = \dfrac{1}{x} \quad v = x^2$

Příklad 5

Vypočítejte:

a) $\int \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}\ dx$

b) $\int 5^x\, dx$

Řešení:

a) Nejdříve stanovíme definiční obor: $x \in (0;\ +\infty)$. Dále integrand upravíme podle pravidel pro počítání s racionálními exponenty na tvar

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}} = \boldsymbol{x}^{\frac{1}{3}} \cdot \boldsymbol{x}^{\frac{1}{6}} \cdot \boldsymbol{x}^{\frac{1}{12}} = \boldsymbol{x}^{\frac{7}{12}}$$

Potom již

$$\int \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}\ dx = \int x^{\frac{7}{12}}\, dx = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{19}} \cdot \boldsymbol{x}^{\frac{19}{12}} + \boldsymbol{c}$$

b) Zde se jedná o základní integrál a proto

$$\int 5^x\, dx = 5^x \cdot \frac{1}{\ln 5} + c$$

Úlohy k procvičení

1. $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) dx$ $\left[-x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} + c\right]$
2. $\int (x^2 - 2x) : x \, dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + c\right]$
3. $\int (sin^2 x - cos^2 x) dx$ $\left[-\frac{1}{2}\sin 2x + c\right]$
4. $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} \, dx$ $[\ln|1 - \cos x| + c]$
5. $\int \frac{3x^2}{1+x^3} \, dx$ $[\ln|1 + x^3| + c]$
6. $\int x \cos x \, dx$ $[x \sin x + \cos x + c]$
7. $\int x^2 \, 2^x \, dx$ $\left[\frac{2^x}{\ln 2}\left(x^2 - \frac{2\,x}{\ln 2} + \frac{2}{ln^2 2}\right) + c\right]$
8. $\int 12^x \, dx$ $\left[12^x \cdot \frac{1}{\ln 12} + c\right]$
9. $\int \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} \, dx$ $\left[\frac{8}{15} \, x^{\frac{15}{8}} + c; x \in (0; +\infty)\right]$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-363-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.