



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

## ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

## PRŮBĚH FUNKCE

**Autor** Iva Kašparová

**Jazyk** čeština

**Datum vytvoření** 2. 2. 2014

**Cílová skupina** žáci 16 – 19 let

**Stupeň a typ vzdělávání** gymnaziální vzdělávání

**Druh učebního materiálu** vzorové příklady a příklady k procvičení

**Očekávaný výstup** žák ovládá pojem spojitost, limita, monotónnost, extrémy a průběh funkce a umí je aplikovat při řešení úloh

**Anotace** materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

## PRŮBĚH FUNKCE

### Postup při vyšetřování průběhu funkce:

- 1) Definiční obor a obor hodnot funkce.
- 2) Sudá, lichá, periodická.
- 3) Body, ve kterých není funkce definovaná, a výpočet jednostranných limit v těchto bodech. Výpočet limit v nevlastních bodech. (Určování těchto limit často přesahuje rámec učiva středoškolské matematiky, je nutná znalost grafů).
- 4) Průsečíky s osami a znaménka funkčních hodnot.
- 5) Výpočet první derivace a body, ve kterých není definovaná, stacionární body, monotónnost funkce a extrémy.
- 6) Výpočet druhé derivace a body, ve kterých není definovaná, inflexní body, konvexnost a konkávnost funkce.
- 7) Asymptoty.
- 8) Graf funkce.

### Příklad 1

Určete průběh funkce f:  $y = \frac{1}{1-x^2}$ .

Řešení:

1)  $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$H_f = \mathbb{R} - \{0\}$ .

2)  $f_{(-x)} = \frac{1}{1-x^2} = f_{(x)} \Rightarrow$  **SUDÁ**

3)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1-x^2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty,$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0.$

4) Průsečík s osou x:  $0 = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow$  **neexistuje.**

Průsečík s osou y:  $y = \frac{1}{1-0^2} = 1.$

5)  $f': y = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 1\},$  **stacionární body:**  $x = 0,$

$(-\infty, 0)$  klesající  $\Rightarrow$  **v bodě 0 lokální minimum(1).**  
 $(0, +\infty)$  rostoucí

6)  $f'': y = \frac{6x^2 + 2}{(1-x^2)^3}, D_{f''} = \mathbb{R} - \{-1, 1\},$

$(-\infty, -1), (1, +\infty)$  konkávní  
 $(-1, 1)$  konvexní

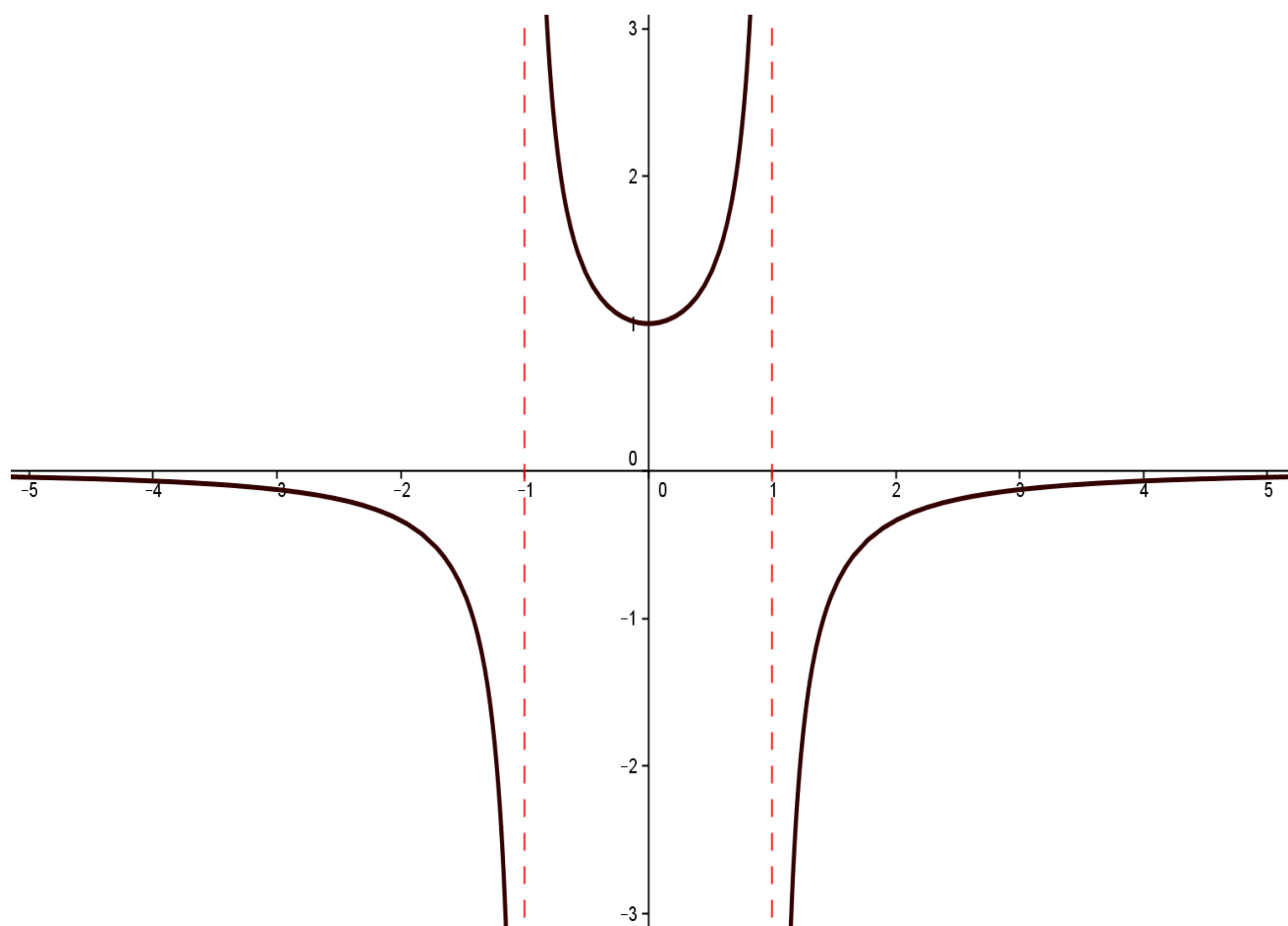
7) Asymptoty bez směrnice:  $a_1: x = -1, a_2: x = 1.$

Asymptoty se směrnicí:  $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(1-x^2)x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} - 0 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

8) *GRAF:*



## Příklad 2

Určete průběh funkce  $f: y = 5x^3 - 3x^5$ .

Řešení:

1)  $D_f = R$

$H_f = R$

2) *Není sudá, lichá ani periodická.*

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - 3x^5) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 3x^5) = \infty$ .

4) **Průsečík s osou  $x$ :**  $0 = 5x^3 - 3x^5 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ .

$(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}), (0, \sqrt{\frac{5}{3}})$  je hodnota funkce kladná,

$(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0), (\sqrt{\frac{5}{3}}, \infty)$  je hodnota funkce záporná

**Průsečík s osou  $y$ :**  $y = 0$ .

5)  $f': y = 15x^2 - 15x^4$ ,  $D_{f'} = R$ , **stacionární body:**  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

$(-\infty, -1), (1, \infty)$  klesající  $\Rightarrow$  **v bodě -1 lokální minimum (-2),**  
 $(-1, 1)$  rostoucí

**v bodě 1 lokální maximum (2)**

6)  $f'': y = 30x - 60x^3$ ,  $D_{f''} = R$ , **Inflexní body:**  $x_1 = 0, x_{2,3} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (0, +\frac{\sqrt{2}}{2})$  konvexní

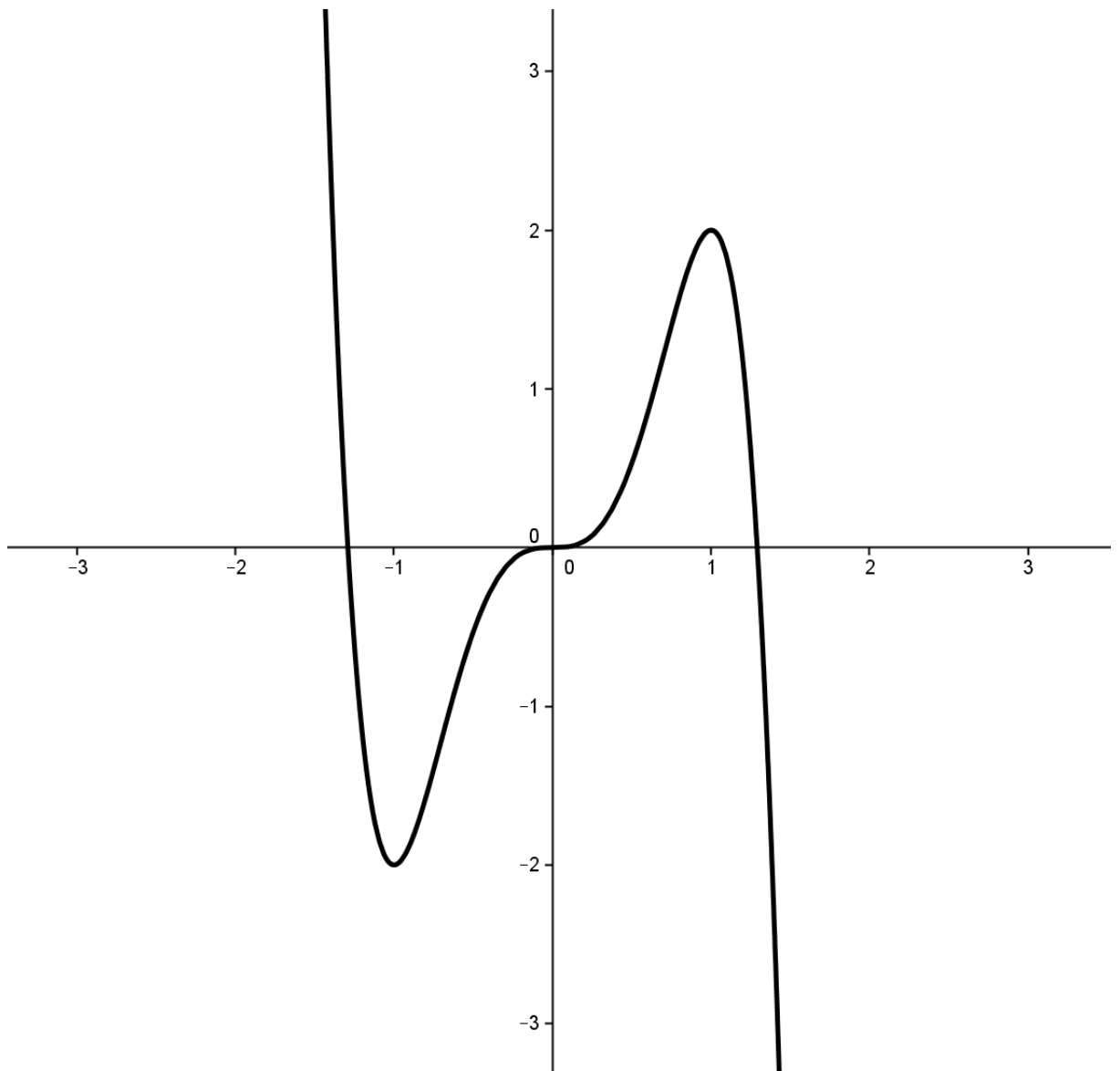
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$  konkávní

7) **Asymptoty bez směrnice: neexistují.**

Asymptoty se směrnici:  $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^3 - 3x^2}{x} = \pm\infty \Rightarrow \text{neexistují}$$

8) *GRAF:*



### Příklad 3

Určete průběh funkce  $f: y = \frac{x}{\ln x}$ .

Řešení:

1)  $D_f = (0,1) \cup (1, \infty)$

$H_f = \mathbb{R} - (0, e)$

2) Ani sudá, ani lichá ani periodická není.

3)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \text{ (l'Hospital. pravidlo)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\ln x}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\ln x} \text{ vzhledem k definičnímu oboru neurčujeme.}$$

4) Průsečík s osou  $x$ : **neexistuje.**

Průsečík s osou  $y$ : **neexistuje.**

5)  $f': y = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , **stacionární body:**  $x = e$

$(0, e)$  klesající  
 $(e, +\infty)$  rostoucí  $\Rightarrow$  **v bodě  $e$  lokální minimum ( $e$ ).**

6)  $f'': y = \frac{\frac{1}{x} \ln x \cdot (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$ ,  $D_{f''} = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , **inflexní body:**  $x = e^2$

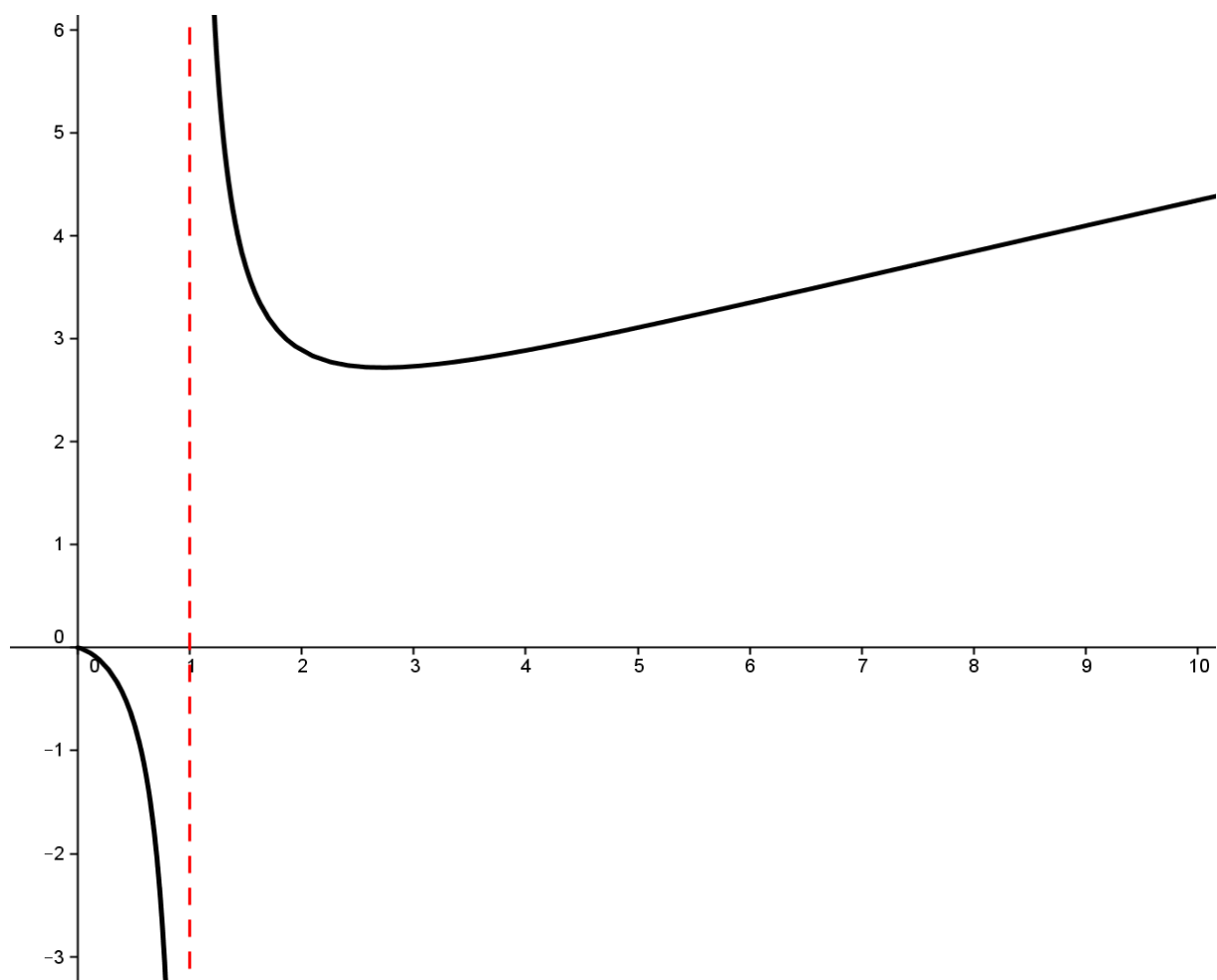
$(0, 1)$ ,  $(e^2, +\infty)$  konkávní  
 $(1, e^2)$  konvexní

7) Asymptoty bez směrnice:  **$a_1: x = 1$ .**

Asymptoty se směrnicí:  $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \text{neexistují.}$$

8) GRAF:

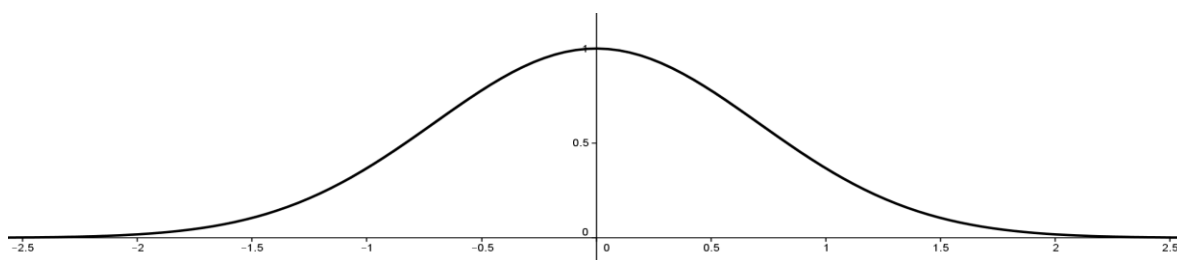




## Úlohy k procvičení:

- 1) Určete průběh funkce  $f : y = e^{-x^2}$ .

[graf:



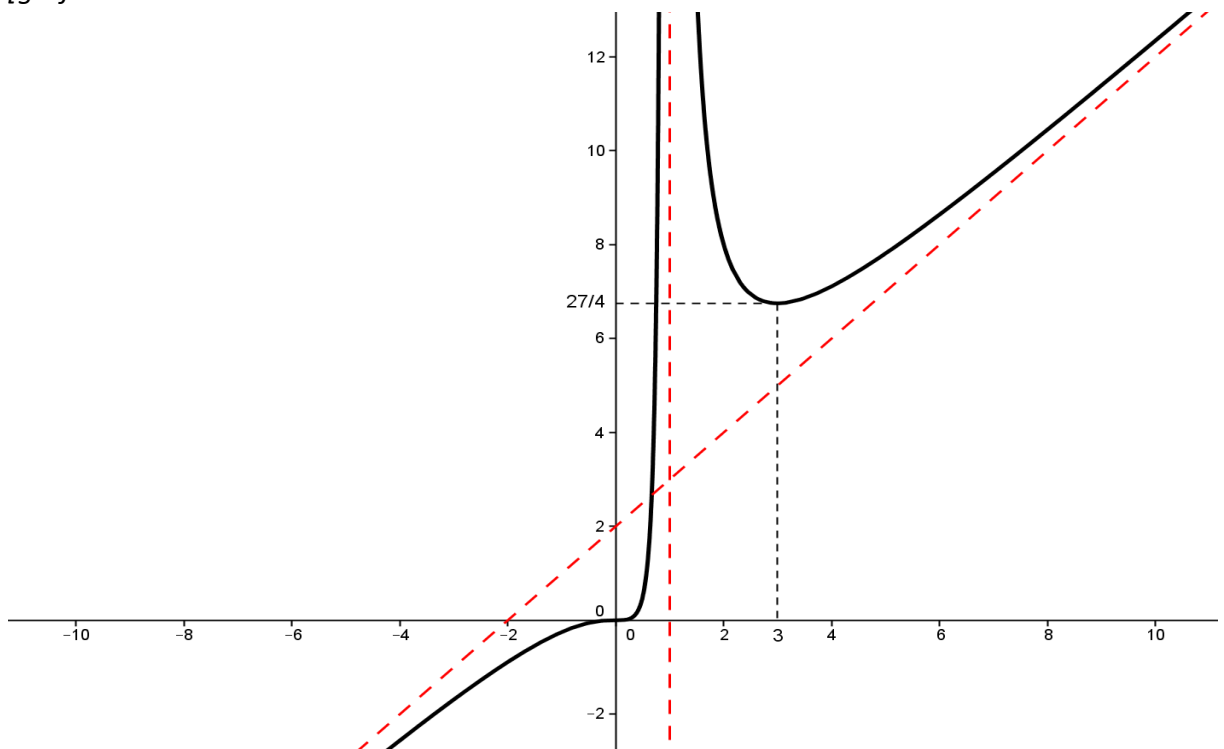
- 2) Určete průběh funkce  $f : y = \ln(4 - x^2)$ .

[graf:



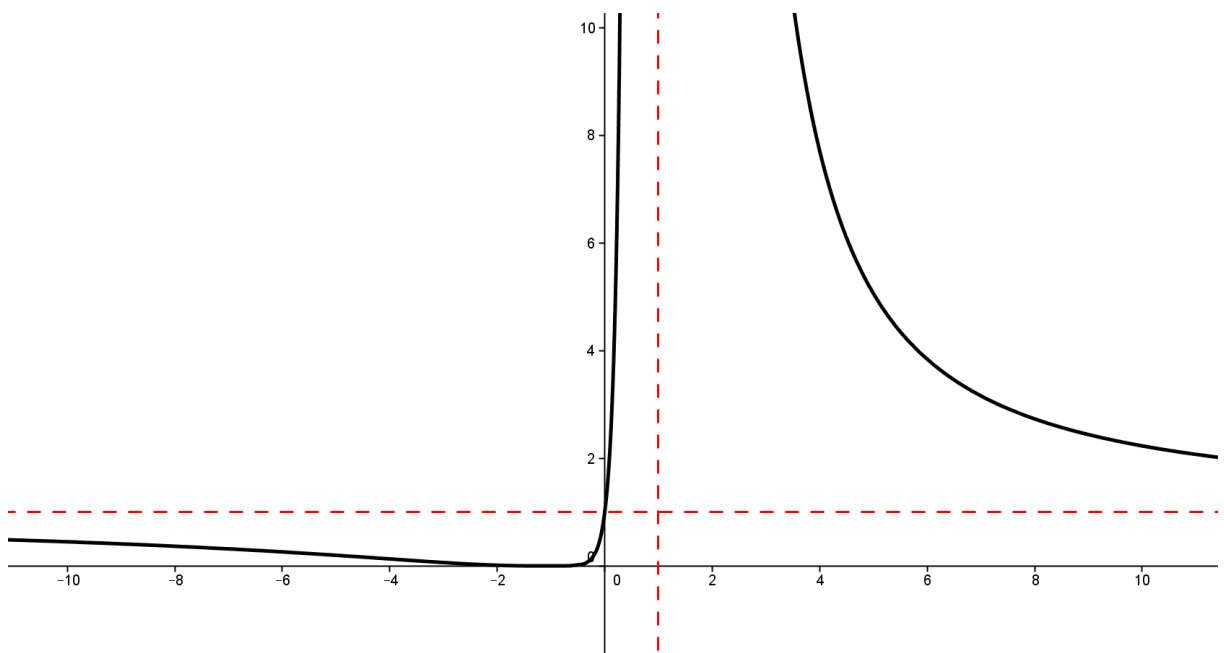
3) Určete průběh funkce  $f : y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ .

[graf:



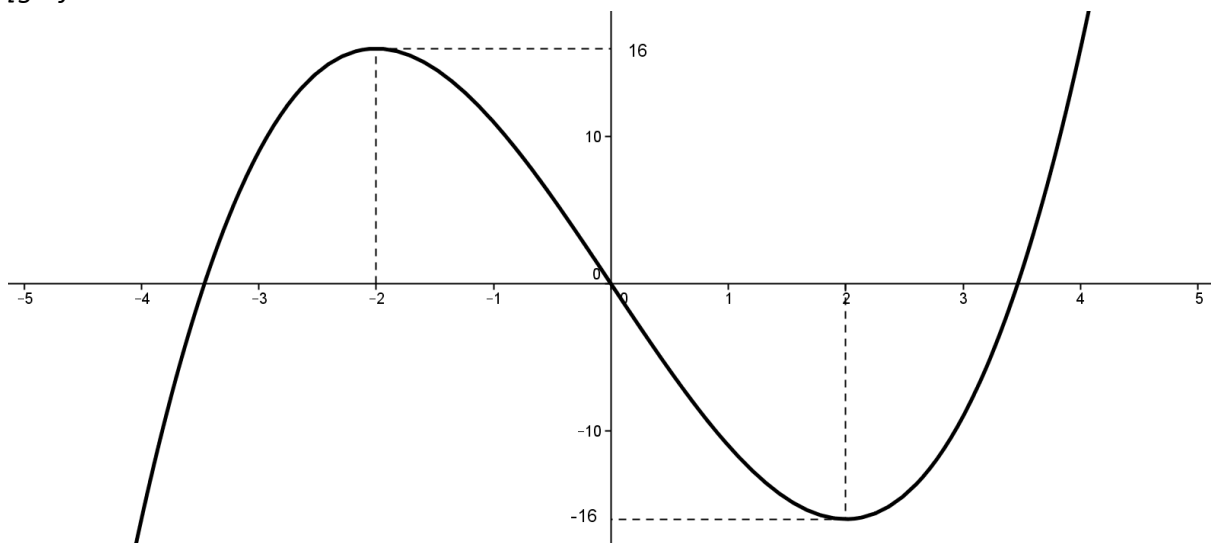
4) Určete průběh funkce  $f : y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ .

[graf:



5) Určete průběh funkce  $f : y = x^3 - 12x$ .

[graf:



### Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.