Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2	Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ A JEJICH UŽITÍ

Autor	Iva Kašparová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	18. 1. 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem lokální a globální extrémy funkce a jejich využití, počítá extrémy funkce a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ A JEJICH UŽITÍ

Příklad 1

Vyšetřete monotónnost a lokální extrémy funkce: $f : y = \frac{x^4}{4} + x^3 - 4x + 7$ **.**

Řešení:

Nejprve určíme první derivaci funkce f: $f' = x^3 + 3x^2 - 4$ *.*

Hledáme stacionární body: $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$$x^3 + 2x^2 + x^2 - 4 = 0$$

$$x^2(x+2) + (x+2)(x-2) = 0$$

$$(x+2)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x+2)(x+2)(x-1) = 0$$

Stacionární body tedy jsou: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Dosazením z intervalu $(-\infty;-2), (-2;1) a (1;\infty)$ *dostaneme:*

1. *pro* $x \in (-\infty;-2)$ *platí:* $f'_{(x)} < 0 \Rightarrow$ *je zde funkce* ***klesající.***
2. *pro* $x \in (-2;1)$ *platí:* $f'_{(x)} < 0 \Rightarrow$ *je zde funkce* ***klesající.***
3. *pro* $x \in (1;\infty)$ *platí:* $f'_{(x)} > 0 \Rightarrow$ *je zde* funkce **rostoucí.**

To znamená, že funkce má v bodě 1 lokální minimum $f_{(1)} = \frac{1}{4} + 1 - 4 + 7 = \frac{17}{4}$ **.**

Také pomocí druhé derivace $f'' = 3x^2 + 6x$ *platí:* $f''_{(1)} = 9 > 0 \Rightarrow$ *je zde lokální minimum.*

V bodě -2 lokální extrém nemá.

Také pomocí druhé derivace $f'' = 3x^2 + 6x$ *platí:* $f''_{(-2)} = 0 > 0 \Rightarrow$ *není zde lokální extrém.*

Příklad 2

Najděte globální (absolutní) extrémy funkce $f: y = x^4 - 2x^3 + 1$.

a) v intervalu $(1;2)$,

b) v intervalu $\langle 1;2 \rangle$,

c) v množině R.

Řešení:

a) *Derivace funkce* $f': y = 4x^3 + 6x^2$ *je spojitá v každém bodě v R.*

Zjistíme stacionární body: $4x^3 + 6x^2 = 0$

$$2x^2(2x - 3) = 0$$

Stacionární body tedy jsou: $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}5$. ***Z intervalu*** $(1;2)$ ***je jen*** $x_2 = 1{,}5$.

Druhá derivace $f'': y = 12x^2 - 12 = 12x(x-1)$

Platí tedy: $f''_{(1,5)} = 9 > 0 \Rightarrow$ ***je zde lokální minimum.***

Protože na intervalu $(1;2)$ ***má funkce f spojitou derivaci a v bodě 1,5 je stacionární bod, je v bodě 1,5 také globální minimum. Globální maximum v intervalu*** $(1;2)$ ***funkce nemá.***

b) ***V uzavřeném intervalu*** $\langle 1;2 \rangle$ *může funkce nabývat globálního extrému v krajních bodech intervalu nebo ve stacionárních bodech.*
V bodě 1,5 je globální minimum.

Dále platí $f_{(1)} = 0$, $f_{(2)} = 1 \Rightarrow$ ***funkce nabývá globálního maxima v bodě 2.***

c) *V množině R zbývá vyšetřit stacionární bod* ***0.***

$f''_{(0)} = 0 \Rightarrow$ ***není zde extrém.***
Tedy funkce f má v množině R globální minimum v bodě 1,5 a globální maximum nemá.

Příklad 3

Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce $f: y = \sin 2x, x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Řešení:

Derivace funkce: $f': y = 2\cos 2x$.

Stacionární body: $2\cos 2x = 0$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4}$$

V intervalu $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{4}\right)$ je f´ < 0 ⇒ funkce f je zde klesající.

$f'': y = -4\sin 2x$

$f''_{(\frac{-\pi}{4})} = 4 > 0$ ⇒ funkce f zde nabývá lokální minimum.

V intervalu $\left(\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ je f´ > 0 ⇒ funkce f je zde rostoucí.

$f''_{(\frac{\pi}{4})} = -4 > 0$ ⇒ funkce f zde nabývá lokální maximum.

V intervalu $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ je f´ < 0 ⇒ funkce f je zde klesající.

Platí tedy, že funkce $f: y = \sin 2x, x \in \left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ***je rostoucí v intervalu*** $\left(\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ ***a klesající v intervalech*** $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{4}\right)$ ***a*** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$***.***

Dále má v bodě $-\frac{\pi}{4}$ ***lokální minimum a v bodě*** $\frac{\pi}{4}$ ***lokální maximum.***

UŽITÍ LOKÁLNÍCH EXTRÉMŮ

Příklad 4

Na přímce p: y = 3x - 1 najděte bod, který má nejmenší vzdálenost od bodu A[1;-2].

Řešení:

X ϵ p ⇒ X [x; 3x-1]

Pro vzdálenost X a A platí: $|AX| = \sqrt{(x-1)^2 + (3x-1+2)^2} = \sqrt{10x^2 + 4x + 2}$

Máme tedy funkci f: y $= \sqrt{10x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{2}(10x^2 + 4x + 2)$ *a hledáme její* ***minimum.***

f′: y = $\frac{1}{2}(10x^2+4x+2)^{\frac{-1}{2}}.(20x+4)=\frac{(20x+4)}{2\sqrt{10x^2+4x+2}}$

Stacionární bod: $\frac{(20x+4)}{2\sqrt{10x^2+4x+2}}=0$

$$(20x+4)=0$$

$$x=\frac{-1}{5}\Rightarrow y=\frac{-8}{5}$$

V intervalu $\left(\frac{-1}{5};\infty\right)$ *je f′ kladná* $\Rightarrow$ *funkce f je zde* ***rostoucí*** *,*

v intervalu $\left(-\infty;\frac{-1}{5}\right)$ *je f′ záporná* $\Rightarrow$ *funkce f je zde* ***klesající****.*

V bodě $x_1 = \frac{-1}{5}$ ***je tedy lokální minimum*** $\Rightarrow X\left[\frac{-1}{5};\frac{-8}{5}\right]$ ***je bod ležící na přímce p a má minimální vzdálenost od A.***

Příklad 5

Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení:

Má platit: a + b = 28 (1)

a.b je maximální (2)

Z (1) dostaneme a = 28 - b a po dosazení do (2) dostaneme (28 - b).b je maximální.

Máme tedy funkci f: y = (28 - b).b = 28b - b^2

f′: y = 28 - 2b

Stacionární body: 28 - 2b = 0

b = 14

f′′: y = -2 < 0 (vždy) $\Rightarrow$ *f má v bodě b = 14 maximum a platí:* ***a = 14, b = 14.***

Úlohy k procvičení:

1) *Určete hodnotu konstanty a ϵ R tak, aby funkce* $y = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ *měla v bodě*

   $x = \frac{1}{3}$ *extrém. Určete druh extrému.*

   [a = 2 , lokální maximum]

2) *Určete monotónnost funkce a lokální extrémy funkcí:*

   a) $y = x.e^{-x}$

   b) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

   c) $y = (2x+3).(x^2 + x + 1)$

   d) $y = \frac{x}{x^2 + 2x + 9}$

   e) $y = x + \cos x, x \in (0;\pi)$

[a) $(-\infty;1) rostoucí, (1;\infty) klesající$ *, v bodě 1 lokální maximum;*
b) $(0;e^2) rostoucí, (e^2;\infty) klesající$ *, v bodě* e^2 *lokální maximum; c) rostoucí v R bez extrémů; d)* $(-3;3) rostoucí, (-\infty;-3), (3;\infty) klesající$ *, v bodě -3 lokální minimum, v bodě 3 lokální maximum; e)* $(0;\frac{\pi}{12}), (\frac{5\pi}{12};\pi), rostoucí, (\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}) klesající$ *, v bodě* $\frac{\pi}{12}$ *lokální maximum, v bodě* $\frac{5\pi}{12}$ *lokální minimum].*

3) *Určete globální extrémy funkce* $f: y = x^4 - 12x^3 + 36x^2$

   a) v intervalu (-1;4),

   b) v intervalu $\langle -2;4 \rangle$*,*

   c) v množině R.

[a) minimum v bodě 0,maximum v bodě 3, b) minimum v bodě 0, maximum v bodě -2, c) minimum v bodech 0 a 6 , maximum nemá]

4) *Určete hodnoty parametrů a,b ϵ R tak, aby funkce* $y = ax^2 + bx + 5$ *měla v bodě*

   $x = 2$ *minimum a jeho hodnota byla 4.*

   [a = ¼, b = -1].

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Diferenciální a integrální počet*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.