



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

SPOJITOST A LIMITA FUNKCE

Autor Iva Kašparová

Jazyk čeština

Datum vytvoření 4. 1. 2014

Cílová skupina žáci 16 – 19 let

Stupeň a typ vzdělávání gymnaziální vzdělávání

Druh učebního materiálu vzorové příklady a příklady k procvičení

Očekávaný výstup žák ovládá pojem spojitost a limita funkce, počítá limity ve vlastním bodě i v nevlastním bodě a umí je aplikovat při řešení úloh

Anotace materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

SPOJITOST A LIMITA FUNKCE

LIMITA VE VLASTNÍM BODĚ:

Příklad 1

Vypočtěte: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\cos^3 x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

Řešení:

V úlohách a) a b) jsou funkce v daných bodech spojité, tedy limity se rovnají hodnotám funkcí v daných bodech. Užitím vět o limitě součtu (rozdílu) a součinu (podílu) dostaneme:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0 + 0 - 0 - 2}{0 - 1} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\cos^3 x} = \frac{0 - 0}{-1} = 0$$

V úlohách c) a d) použijeme definici limity a funkce nejdřív upravíme:

$$\begin{aligned} c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x+2) - (x+2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin x \cos x(1 - \cos^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} = \frac{1}{1 \cdot (1 + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

LIMITA V NEVLASTNÍM BODĚ

Příklad 2

Vypočtěte: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 + 3x - 7}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$

Řešení:

a) Limita čitatele i jmenovatele je $+\infty$, proto rozšíříme zlomek výrazem $\frac{1}{x^2}$ a dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 + 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2}}{\frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}$$

b) Nejprve zlomky sloučíme a pak rozšíříme výrazem $\frac{1}{x^3}$ a dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 - 2x^4 + x^2}{(2x^2 - 1)(2x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1 + 0}{4 + 0 - 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

UŽITÍ LIMITY FUNKCE

Příklad 3

Najděte asymptoty grafu funkce $f : y = x + \frac{1}{x}$.

Řešení:

Funkce $f : y = x + \frac{1}{x}$ není definovaná v bodě $x = 0$, proto je **asymptota bez směrnice** : $a_1 : x = 0$.

Asymptoty se směrnicí mají rovnici:

$$y = ax + b, \text{ kde } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Proto $a_2 : y = x$.

Příklad 4

Určete rovnici tečny grafu funkce $f : y = x^2$ v bodě $T[x_0, y_0]$, kde $x_0 = 3$.

Řešení:

Dopočítáme $y_0 = 9$. Rovnice tečny: $y - y_0 = k_T(x - x_0)$, kde k_T je směrnice tečny v bodě T a platí:

$$k_T = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x-3} = 6$$

Rovnice tečny tedy je: $y - 9 = 6(x - 3)$.

Úlohy k procvičení:

1) Vypočítejte: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 16}$, c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$,
e) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot gx$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x + x}$..

[a)0, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{1}{4}$, d)1, e)1, f)0]

2) Vypočítejte: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 5x - 7}$, b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$, c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10}$,
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 6x^2 - 4}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$.

[a)0,5, b)4, c) $\frac{1}{4}$, d)2, e)5, f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$].

3) Určete rovnici tečny grafu funkce :

a) $f : y = \frac{1}{x}$ v bodě $T[x_0; y_0]$, kde $x_0 = -1$

b) $f : y = \sin x$ v bodě $T[x_0; y_0]$, kde $x_0 = 0$.

[a) $y + 1 = -(x + 1)$, b) $y = x$].

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.