Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	17. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák zná definici hyperboly a její analytické vyjádření středovou i obecnou rovnicí, umí určit charakteristiky hyperboly, ovládá řešení úloh o vzájemné poloze přímky a hyperboly
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Napište středovou i obecnou rovnici hyperboly a obecné rovnice jejích asymptot, je-li dán střed hyperboly $\boldsymbol{S[3;0]}$, vrchol $\boldsymbol{A[-1;\ 0]}$ a excentricita *e = 5.*

Řešení:

Střed i vrchol leží na ose x, proto středovou rovnici hyperboly budeme hledat ve tvaru:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

Určíme velikost hlavní poloosy: $a=|SA|=\sqrt{(3+1)^2+(0-0)^2}=4$

Známe hlavní poloosu a excentricitu, vypočítáme velikost vedlejší poloosy: $b=\sqrt{e^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3$

Nyní můžeme napsat středovou rovnici hyperboly: $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Umocníme, odstraníme zlomky a upravíme na obecnou rovnici: $9x^2-16y^2-54x-63=0$

Asymptoty dané hyperboly budou mít tvar: $\frac{x-3}{4}\pm\frac{y}{3}=0$, *po úpravách získáme jejich obecné rovnice:* $3x+4y-9=0\,;3x-4y-9=0$

---

2) Určete středové rovnice všech hyperbol, jejichž hlavní osa je 8, excentricita e = 5 a vrchol $\boldsymbol{A[3;-1]}$.

Řešení:

Hlavní osa je 8 ⇒ a = 4; nyní snadno vypočítáme b: $b=\sqrt{e^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3$

Zadání vyhovují 4 hyperboly, dvě mají hlavní osu rovnoběžnou s osou x a dvě mají hlavní osu rovnoběžnou s osou y.

Hyperbola H_1: $a\parallel x$, *A je vrcholem levé větve, střed S leží vpravo od A ⇒* $S[3+4;\ -1]=S[7;\ -1]$

$$\frac{(x-7)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

Hyperbola H_2: $a\parallel x$, *A je vrcholem pravé větve, střed S leží vlevo od A ⇒* $S[3-4;\ -1]=S[-1;\ -1]$

$$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

Hyperbola H_3: $a\parallel y$, *A je vrcholem horní větve, střed S leží pod A ⇒* $S[3;\ -1-4]=S[3;\ -5]$

$$\frac{(y+5)^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$$

Hyperbola H_4: $a\parallel y$, *A je vrcholem dolní větve, střed S leží nad A ⇒* $S[3;\ -1+4]=S[3;\ 3]$

$$\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$$

---

3) Napište rovnici přímky, na níž leží tětiva hyperboly $x^2 - y^2 = 1$ půlená bodem $M[-2; 1]$.

Řešení:
Tětiva i se svým středem M leží na přímce p: $y - 1 = k(x + 2)$
V rovnici přímky p potřebujeme určit směrnici k.
Proto budeme řešit soustavu rovnic s neznámými x, y a parametrem k.
Z rovnice přímky vyjádříme neznámou y a dosadíme do rovnice hyperboly a po úpravách získáme: $x^2(1 - k^2) + x(-4k^2 - 2k) - 4k^2 - 4k - 2 = 0$
Rovnici podělíme výrazem $(1 - k^2)$*, za předpokladu, že* $k \neq \pm 1$*. Po úpravách získáme:*
$$x^2 + x\frac{2k(2k+1)}{k^2 - 1} + \frac{2(2k^2 + 2k + 1)}{k^2 - 1} = 0$$
Kořeny x_1 a x_2 této rovnice jsou x-ové souřadnice krajních bodů tětivy.
Na základě vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice pro součet kořenů x_1 a x_2 platí:
$$x_1 + x_2 = -\frac{2k(2k+1)}{k^2 - 1} \qquad (1)$$
Bod M je středem tětivy, proto platí: $\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 = -4 \qquad (2)$
Porovnáme pravé strany vztahů (1) a (2) a vypočítáme k:
$$-\frac{2k(2k+1)}{k^2 - 1} = -4 \;\Rightarrow 2k^2 + k - 2k^2 + 2 = 0 \;\Rightarrow k = -2$$
Nyní již můžeme napsat rovnici hledané přímky:
směrnicový tvar: $y = -2x - 3$
obecná rovnice: $2x + y + 3 = 0$

---

4) Proveďte úplnou diskuzi o vzájemné poloze hyperboly $2(x + 2)^2 - 9(y - 4)^2 = 18$ a přímky $p: x - 2y + c = 0,\; c \in R$.

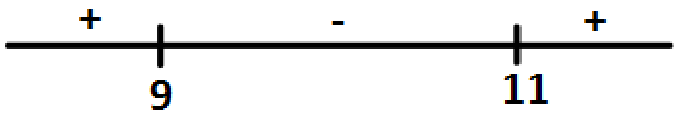
Řešení:
Přímky rovnoběžné s asymptotami mají s hyperbolou jeden společný bod, proto je nutné zjistit, zda přímka p není rovnoběžná s některou asymptotou. Budeme tedy zjišťovat, zda normálový vektor přímky p je nebo není násobkem normálového vektoru některé asymptoty.
Asymptoty mají rovnice: $\sqrt{2}(x + 2) \pm 3(y - 4) = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n_1} = (\sqrt{2}; 3) \quad \overrightarrow{n_2} = (\sqrt{2}; -3)$
Normálový vektor přímky p má souřadnice $\overrightarrow{n_p} = (1; -2)$ *a není násobkem normálového vektoru žádné asymptoty ⇒ přímka p není rovnoběžná s ani jednou asymptotou.*
Budeme hledat společné body hyperboly a přímky p ⇒ řešíme soustavu rovnic s neznámými x a y a parametrem c ∈ R. Z rovnice přímky vyjádříme neznámou x a dosadíme do rovnice hyperboly.
$$x = 2y - c \qquad (1)$$
$$2(4y^2 + c^2 + 4 - 4yc + 8y - 4c) - 9(y^2 - 8y + 16) - 18 = 0 \qquad (2)$$
Po úpravách dospějeme ke kvadratické rovnici s neznámou y a parametrem c:

$y^2 + y(8c - 88) + (154 + 8c - 2c^2) = 0 \qquad (3)$

Počet kořenů a tedy počet společných bodů hyperboly a přímky závisí na hodnotě diskriminantu. Vypočteme diskriminant:

$D = (8c - 88)^2 - 4(154 + 8c - 2c^2) \;\Rightarrow\; D = 72(c^2 - 20c + 99) = 72(c - 9)(c - 11)$

Zjišťujeme, pro která c bude diskriminant kladný, pro která záporný a pro která roven 0.



Závěr:

$c \in (-\infty; 9) \cup (11; \infty)$: $D > 0 \Rightarrow$ *přímka p je sečnou, má s hyperbolou 2 společné body*

$c \in (9; 11)$: $D < 0 \Rightarrow$ *přímka p je nesečnou, nemá s hyperbolou žádné společné body*

$c \in \{9; 11\}$: $D = 0 \Rightarrow$ *přímka p je tečnou, má s hyperbolou 1 společný bod*

Můžeme ještě vypočítat souřadnice bodů dotyku.

c = 9 dosadíme do rovnice (3) $\Rightarrow y^2 - 16y + 64 = 0 \;\Rightarrow\; (y - 8)^2 = 0 \;\Rightarrow y = 8$

Z rovnice (1) určíme x-ovou souřadnici: $x = 7$

Přímka $p: x - 2y + 9 = 0$ *se dotýká hyperboly v bodě* $T[7; 8]$

c = 11 dosadíme do rovnice (3) $\Rightarrow y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$

Z rovnice (1) určíme x-ovou souřadnici: $x = -11$

Přímka $p: x - 2y + 11 = 0$ *se dotýká hyperboly v bodě* $T[-11; 0]$

<u>Příklady k procvičování:</u>

1) Ukažte, že rovnice $4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y - 29 = 0$ je rovnicí hyperboly. Potom určete polohu její hlavní poloosy, velikosti poloos, excentricitu, souřadnice středu, ohnisek, vrcholů, a rovnice asymptot.

(správné řešení: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1;\ a \parallel x;\ a = 3; b = 2; e = \sqrt{13}$

$S[-2;\ -1]; E[-2 - \sqrt{13};\ -1]; F[-2 + \sqrt{13};\ -1]; A[-5;\ -1]; B[1;\ -1]$

$2x + 3y + 7 = 0; 2x - 3y + 1 = 0$)

2) Která tečna hyperboly $9x^2 - 25y^2 = 225$ tvoří na ose x úsek p = 4.

(správné řešení: $x - y - 4 = 0; x + y - 4 = 0$)

3) Vypočtěte délku té tětivy hyperboly $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$, která prochází jejím ohniskem kolmo k hlavní ose hyperboly.

(správné řešení: 4,5 j.d.)

4) Určete tečny hyperboly $9x^2 - 4y^2 = 324$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 45x + 4y - 180 = 0$.
(správné řešení: $45x + 4y \pm 18\sqrt{221} = 0$)

5) Vypočítejte velikost úhlu, který svírají asymptoty hyperboly $16x^2 - 25y^2 = 400$.
(správné řešení: $\varphi = 77°19'$)

6) Napište rovnice tečen z bodu $M\left[\frac{3}{5};\ -4\right]$ k hyperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$.
(správné řešení: $5x + 3y + 9 = 0, 20x - 9y - 48 = 0$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.