Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE (včetně řešení v C)

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	6. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá kvadratické rovnice a nerovnice a to i v oboru komplexních čísel a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Kvadratické rovnice a nerovnice (včetně řešení v C)

Příklad 1

V množině ***R*** řešte rovnici $2x^2 - 5x = 0.$

Řešení:

Jedná se o neúplnou kvadratickou rovnici bez absolutního členu. Vyřešíme ji převedením na rovnici v součinovém tvaru a to:

$$2x^2 - 5x = 0$$
$$x.(2x - 5) = 0$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{5}{2}$$

Pozn.: Zkouška není nutná, prováděli jsme ekvivalentní úpravy.

Příklad 2

V množině ***R*** řešte rovnici $3x^2 - 27 = 0.$

Řešení:

Jedná se o ryze kvadratickou rovnici bez lineárního členu. Tento typ rovnice můžeme řešit dvěma způsoby – rozložením na součin nebo využít absolutní hodnotu.

1. *způsob:*

$$3x^2 - 27 = 0$$
$$3.(x^2 - 9) = 0$$
$$3.(x + 3).(x - 3) = 0$$
$$x_1 = -3;\ x_2 = 3$$

2. *způsob:*

$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = 9$$
$$|x| = \sqrt{9}$$
$$x_1 = 3;\ x_2 = -3$$

Příklad 3

V množině ***R*** řešte rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0.$

Řešení:

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici. Tento typ rovnic řešíme užitím Viètových vztahů nebo použitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

1. *způsob:*

$$m + n = -5, m.n = 6$$
$$m = -2; n = -3$$
$$Proto\ (x - 2).(x - 3) = 0$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = 3$$

2. *způsob:*

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = 3$$

Příklad 4

V množině ***R*** řešte rovnici $2x^2 - 5x - 3 = 0.$

Řešení:

Zde bude výhodnější použít vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Tedy

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

Příklad 5

V množině ***R*** řešte rovnici $3x^2 + 2x + 1 = 0.$

Řešení:

Opět využijeme vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Dostáváme

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$$

Pod odmocninou vychází záporné číslo → v množině ***R*** nelze řešit a rovnice nemá v této množině řešení.

Příklad 6

V množině ***C*** řešte rovnici $3x^2 + 2x + 1 = 0.$

Řešení:

Nyní se situace mění, v množině komplexních čísel je tato rovnice řešitelná. Diskriminant rovnice je *D* = - 8 a dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice vypočítáme

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{6} = \frac{-2 \pm i.2\sqrt{2}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3};\ x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$$

Příklad 7

V množině ***C*** řešte rovnici $ix^2 + 2x - 5i = 0$

Řešení:

Jedná se o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty. Diskriminant zadané rovnice je $D = 4 + 20i^2 = -16 = 16.(\cos \pi + i \sin \pi)$. Dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice vypočítáme

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2})}{2i} = \frac{-2 \pm 4i}{2i} = \pm 2 + i$$

Příklad 8

V množině ***R*** řešte nerovnici $x^2 - 2x - 15 \leq 0$.

Řešení:

S využitím Viètových vztahů upravíme levou stranu nerovnice na součinový tvar a dostáváme

$$(x-5).(x+3) \leq 0$$

Množinou všech řešení je potom interval $\langle -3; 5 \rangle$.

Příklad 9

V množině ***R*** řešte nerovnici $16x^2 + 24x + 9 > 0$.

Řešení:

Pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice určíme nulové body levé strany nerovnice a poté rozložíme na součin. Tedy

$$x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 16.36}}{32} = \frac{-24 \pm 0}{32} = -\frac{3}{4}$$

Získali jsme jeden dvojnásobný reálný kořen, koeficient *a* = + 16 (parabola je tedy „otočená“ nahoru) a řešením je

$$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

Úlohy k procvičení

Řešte v množině ***R*** následující rovnice:

1. $3x^2 + 4x = 0$ [$x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{3}{4}$]
2. $-2x^2 + 6x = 0$ [$x_1 = 0$; $x_2 = 3$]
3. $x^2 - 16 = 0$ [$x_1 = 4$; $x_2 = -4$]
4. $2x^2 + 8 = 0$ [$\emptyset$]
5. $x^2 - 6x - 216 = 0$ [$x_1 = 18$; $x_2 = -12$]
6. $x^2 - 64x - 1621 = 0$ [$x_1 = 32+23.\sqrt{5}$; $x_2 = 32-23.\sqrt{5}$]
7. $5x^2 - 18x - 8 = 0$ [$x_1 = 4$; $x_2 = -\frac{2}{5}$]
8. $2x^2 + 1{,}1x - 3{,}91 = 0$ [$x_1 = 1{,}15$; $x_2 = -1{,}7$]
9. $x^2 - 10x + 28 = 0$ [$\emptyset$]
10. $x^2 - 30x + 302 = 0$ [$\emptyset$]

Řešte v množině ***C*** následující rovnice:

11. $5x^2 - 2x + 1 = 0$ [$x_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i$]
12. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ [$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$]
13. $x^2 - 6ix - 12 = 0$ [$x_{1,2} = \pm\sqrt{3} + 3i$]
14. $x^2 + x.(2 - i) + 3 - i = 0$ [$x_1 = -1 + 2i;\ x_2 = -1 - i$]

Řešte v množině ***R*** následující nerovnice:

15. $x^2 + 11x + 24 < 0$ [$(-8;\ -3)$]
16. $-x^2 + 5x - 6 > 0$ [$(2;\ 3)$]
17. $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ [$(-\infty; 2\rangle \cup \langle 4;\ +\infty)$]
18. $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ [$(-\infty; -2\rangle \cup \langle -1;\ +\infty)$]

Bonus

- *a) Součet dvou čísel je 79, součet jejich druhých mocnin je 4225. Určete tato čísla.* (63; 16)
- *b) Dvojciferné číslo má ciferný součet 9. Vyměníme-li obě číslice, vznikne číslo, které znásobené původním dá součin 2430. Které je to číslo?* (45; 54)

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.