INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ANALYTICKÁ GEOMETRIE ELIPSY

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	14. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák zná definici elipsy a způsoby jejího analytického vyjádření; umí určit charakteristické veličiny elipsy; zná vztah pro tečnu elipsy a umí řešit úlohy o vzájemné poloze přímky a elipsy
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Ukažte, že rovnice $169x^2 + 144y^2 - 676x + 288y - 23\,516 = 0$ je obecnou rovnicí elipsy. Určete její polohu v soustavě souřadné, střed, ohniska a vrcholy.

Řešení:

Obecnou rovnici elipsy upravíme na osový tvar:

$169(x^2 - 4x) + 144(y^2 + 2y) - 23\,516 = 0$

$169(x - 2)^2 - 676 + 144(y + 1)^2 - 144 - 23\,516 = 0$

$169(x - 2)^2 + 144(y + 1)^2 = 24\,336$

$$\frac{(x-2)^2}{144} + \frac{(y+1)^2}{169} = 1$$

Z rovnice vyčteme:

- *střed elipsy* $S[2; -1]$
- *velikost hlavní poloosy a = 13 a vedlejší poloosy b = 12*
- *poznáme, že hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y*

Vypočítáme excentricitu e: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

Určíme hlavní vrcholy: $A[2; -1 - 13] \Rightarrow A[2; -14]; B[2; -1 + 13] \Rightarrow B[2; 12]$

Určíme vedlejší vrcholy: $C[2 - 12; -1] \Rightarrow C[-10; -1]; D[2 + 12; -1] \Rightarrow B[14; -1]$

Určíme ohniska: $E[2; -1 - 5] \Rightarrow E[2; -6]; F[2; -1 + 5] \Rightarrow F[2; 4]$

---

2) Určete velikost úhlu φ, pod kterým je z bodu $A[0; -3]$ vidět elipsu E: $5x^2 + 9y^2 = 45$.

Řešení:

Úhel φ je úhel, který svírají tečny vedené z bodu A k elipse E.

Tečny budeme hledat ve tvaru: $5xx_T + 9yy_T = 45$

Bod A na tečně leží: $5 \cdot 0 \cdot x_T + 9 \cdot (-3) \cdot y_T = 45 \Rightarrow y_T = -\frac{5}{3}$

Určili jsme y-ovou souřadnici bodu dotyku. Musíme určit ještě jeho x-ovou souřadnici. Určíme z podmínky, že bod T je zároveň i bodem elipsy E:

$$5x_T^2 + 9 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = 45 \Rightarrow x_T^2 = 4 \Rightarrow x_T = \pm 2$$

Body dotyku existují dva: $T_1\left[2; -\frac{5}{3}\right]$ *a* $T_2\left[-2; -\frac{5}{3}\right]$

Souřadnice bodů dotyku dosadíme do vztahu pro tečnu elipsy E, získáme obecné rovnice dvou tečen a zapíšeme jejich normálové vektory:

$t_1: 10x - 15y = 45 \Rightarrow 2x - 3y - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n_1} = (2; -3)$

$t_2: -10x - 15y = 45 \Rightarrow 2x + 3y + 15 = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n_2} = (2; 3)$

Určíme úhel φ:

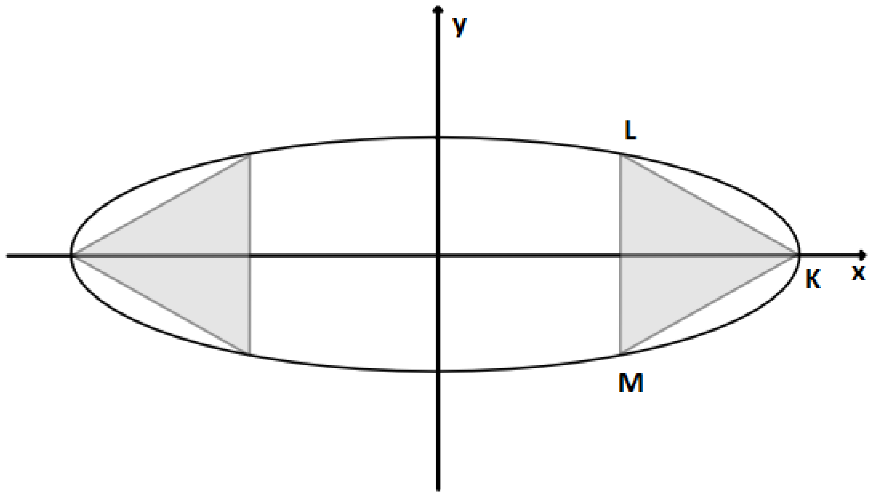
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{4 - 9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{5}{13} \Rightarrow \varphi = 112°37'$$

Elipsa E je z bodu A vidět pod úhlem $\varphi = 112°37'$.

---

3) Do elipsy E: $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ je vepsán rovnostranný trojúhelník souměrný podle její hlavní osy. Určete souřadnice jeho vrcholů.

Řešení:



Jak ukazuje obrázek, takové trojúhelníky existují dva a jsou navzájem souměrné podle osy y. Úlohu tedy budeme řešit pouze pro trojúhelník KLM.

Vrchol K je totožný s hlavním vrcholem elipsy $\Rightarrow K[3;0]$.

Zbývají vrcholy L, M mají stejnou x-ovou souřadnici a jejich y-ové souřadnice jsou opačná čísla $\Rightarrow L[x;y]; M[x;-y]$.

Trojúhelník KLM je rovnostranný $\Rightarrow\ |KL|=|KM|=|LM|$

$|KL|=|LM|$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+y)^2}$

$\sqrt{x^2-6x+9+y^2}=\sqrt{4y^2}$

$x^2-6x+9=3y^2$

$y^2=\frac{x^2-6x+9}{3}$ (1)

Souřadnice bodů L, M musí vyhovovat rovnici elipsy E, proto vyjádření (1) *dosadíme do rovnice elipsy* $\Rightarrow$

$\frac{x^2}{9}+\frac{x^2-6x+9}{3}=1$

$x^2+3x^2-18x+27=9$

$4x^2-18x+18=0$

$2x^2-9x+9=0\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}\ \Rightarrow\ x_1=3;\ x_2=\frac{3}{2}$

Ke každému x pomocí vztahu (1) *dopočítáme y* $\Rightarrow\ y_1=0;\ y_2=\frac{\sqrt{3}}{2};\ y_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vrcholy trojúhelníka KLM mají souřadnice: $K[3;0]; L\left[\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]; M\left[\frac{3}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Trojúhelník k němu souměrný podle osy y má vrcholy: $[-3;0]; \left[-\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]; \left[-\frac{3}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

4) Určete parametr b ∈ R∧ b ≠ 0 tak, aby přímka p byla tečnou elipsy E:
p: 2x + 3y – 12 = 0; E: $b^2x^2 + 25y^2 = 25b^2$.

Řešení:
Z rovnice přímky vyjádříme neznámou y a toto vyjádření dosadíme do rovnice elipsy.

$$y = \frac{12 - 2x}{3}$$

$$b^2x^2 + 25 \cdot \frac{144 - 48x + 4x^2}{9} = 25b^2 \text{①}$$

Rovnici ① upravíme na kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem $b \in R - \{0\}$.

$$x^2(100 + 9b^2) - 1\,200x + 3\,600 - 225b^2 = 0 \qquad \text{②}$$

Protože přímka p má být tečnou elipsy E, musí mít rovnice ② jediné řešení; jediné řešení bude právě tehdy, když diskriminant bude roven 0.

$$1\,200^2 - 4 \cdot (100 + 9b^2) \cdot (3\,600 - 225b^2) = 0$$

Po úpravách dostaneme: $9b^4 - 44b^2 = 0 \Rightarrow b^2(9b^2 - 44) = 0 \Rightarrow b_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{11}}{3}$

Protože b představuje velikost hlavní poloosy, tak řešením je pouze $b = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Příklady k procvičování:

1) Napište rovnici elipsy, která se osy x dotýká v bodě $X[-4; 0]$ a osy y v bodě $Y[0; 5]$.
(správné řešení: $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$)

2) Napište rovnice tečen elipsy $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: x - y - 6 = 0$.
(správné řešení: $x - y - \sqrt{13} = 0; x - y + \sqrt{13} = 0$)

3) Napište rovnice tečen elipsy $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$, které mají směrnici $k = 1$.
(správné řešení: $x - y \pm 5 = 0\ nebo\ y = x \pm 5$)

4) Napište rovnici elipsy, která prochází bodem $A[-4; \sqrt{21}]$, její ohniska leží na ose x, excentricita e = 6 a její osy leží na souřadnicových osách x a y.
(správné řešení: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$)

5) Vypočítejte délku tětivy, kterou na elipse $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ vytíná osa II. a IV. kvadrantu.
(správné řešení: $\frac{45}{17}\sqrt{2}$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.