INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	4. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák zná definici paraboly a její analytické vyjádření vrcholovou i obecnou rovnicí, umí určit charakteristiky paraboly, ovládá řešení úloh o vzájemné poloze přímky a paraboly
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Napište vrcholovou rovnici paraboly, je-li dáno:

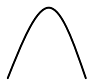
a) vrchol $\boldsymbol{V[0;0]}$ a ohnisko $\boldsymbol{F[0;\ -8]}$,

b) vrchol $\boldsymbol{V[0;0]}$ a rovnice řídící přímky $\boldsymbol{d: x = -2}$,

c) vrchol $\boldsymbol{V[-3;-2]}$ a rovnice řídící přímky $\boldsymbol{d: y = -3}$,

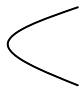
d) ohnisko $\boldsymbol{F[2;1]}$ a rovnice řídící přímky $\boldsymbol{d: x = 7}$.

Řešení:

a) Ze zadání zjistíme, že se jedná o parabolu typu 

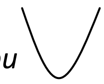
Rovnice má tvar $x^2 = -2py$. *Je tedy nutné určit parametr p. Platí:* $\frac{p}{2} = |VF| \Rightarrow \frac{p}{2} = 8 \Rightarrow p = 16$

Parabola má rovnici: $x^2 = -32y$

b) Ze zadání vyplývá, že se jedná o parabolu typu 

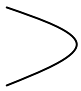
Rovnici hledáme ve tvaru $y^2 = 2px$. *Musíme určit parametr p. Platí:* $\frac{p}{2} = |dV| \Rightarrow \frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4$

Parabola má rovnici: $y^2 = 8x$

c) Toto zadání určuje parabolu typu 

Rovnice je tvaru $(x-m)^2 = 2p(y-n)$. *I v tomto případě je nutné určit hodnotu parametru p. Určíme jej stejně jako v zadání b:* $\frac{p}{2} = |dV| \Rightarrow \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$

Parabola má rovnici: $(x+3)^2 = 4(y+2)$

d) Poslední zadání určuje parabolu typu 

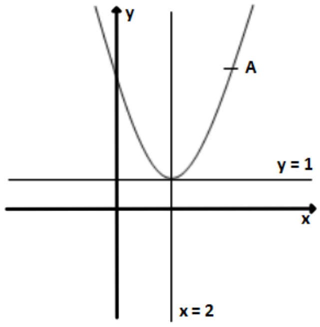
V tomto případě má rovnice paraboly tvar $(y-n)^2 = -2p(x-m)$. *Pro parametr p platí:* $|dF| = p \Rightarrow p = 5$. *Uprostřed mezi řídící přímkou a ohniskem leží vrchol paraboly* $\Rightarrow V[4{,}5;1]$.

Parabola má rovnici: $(y-1)^2 = -10(x-4{,}5)$

---

2) Napište vrcholovou rovnici paraboly, která prochází bodem $A[4;5]$, její osa má rovnici $x=2$ a tečna ve vrcholu je přímka o rovnici $y-1=0$.

Řešení:



Situaci zakreslíme do soustavy souřadné. Je vidět, že rovnici paraboly budeme hledat ve tvaru $(x-m)^2 = 2p(y-n)$.
Snadno určíme souřadnice vrcholu paraboly $\Rightarrow V[2;1]$.
Do rovnice paraboly dosadíme souřadnice bodu A i vrcholu V a určíme hodnotu parametru p.

$(4-2)^2 = 2p(5-1) \;\Rightarrow 2p = 1$

Parabola má rovnici: $(x-2)^2 = y-1$

---

3) Napište rovnici paraboly, která prochází body $A[1;2], B[-1;5], C[7;5]$.

Řešení:

Zakreslíme-li si body do soustavy souřadné, uvědomíme si, že rovnice paraboly bude mít tvar:
$(x-m)^2 = 2p(y-n)$

Z polohy bodů B a C určíme rovnici osy paraboly $x=3$ *a tím zároveň známe x-ovou souřadnici vrcholu.*

Nyní ještě musíme určit n, p. Určíme řešením soustavy rovnic:

$(1-3)^2 = 2p(2-n)$

$\underline{(-1-3)^2 = 2p(5-n)}$

$4 = 2p(2-n)$

$\underline{16 = 2p(5-n)}$

$2 = p(2-n) \Rightarrow p = \dfrac{2}{2-n}$

$\underline{8 = p(5-n)}$

$8 = \dfrac{2}{2-n}\cdot(5-n) \;\Rightarrow 16 - 8n = 10 - 2n \;\Rightarrow n = 1$

A dopočítáme p: $p = \frac{2}{2-1} = 2$

Parabola má rovnici: $(x-3)^2 = 4(y-1)$

<u>Poznámka:</u> 1)Úlohu lze řešit přes soustavu tří rovnic s neznámými m, n, p:

$$(1-m)^2 = 2p(2-n)$$
$$(-1-m)^2 = 2p(5-n)$$
$$(7-m)^2 = 2p(5-n)$$

2) Můžeme také využít rovnici kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ *a řešit soustavu rovnic s neznámými a, b, c:*

$$2 = a + b + c$$
$$5 = a - b + c$$
$$5 = 49a + 7b + c$$

---

4) Ukažte, že rovnice $2x^2 - 6x - 10y - 3 = 0$ je rovnicí paraboly. Určete její charakteristiky. Parabolu zakreslete do soustavy souřadné a vypočítejte souřadnice jejích průsečíků s osami.

Řešení:

Rovnici upravíme na vrcholový tvar:

$$2(x^2 - 3x) - 10y - 3 = 0$$
$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{4} = 10y + 3$$
$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 10y + \frac{15}{2}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5y + \frac{15}{4}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5\left(y + \frac{3}{4}\right)$$

Jedná se o parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s osou y a parametr $p = \frac{5}{2}$.

Vrchol paraboly: $V\left[\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right]$

Ohnisko paraboly: $F\left[\frac{3}{2}; -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right] \Rightarrow F\left[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

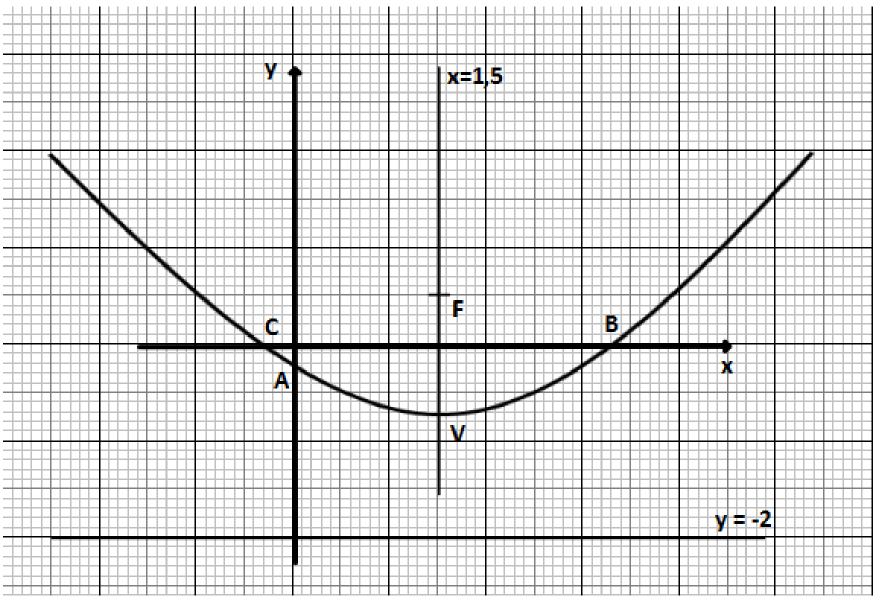
Rovnice řídící přímky d: $y = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow y + 2 = 0$

Osa paraboly o: $x = \frac{3}{2}$

Průsečík s osou y: do rovnice paraboly dosadit x = 0 ⇒ $A\left[0; -\frac{3}{10}\right]$

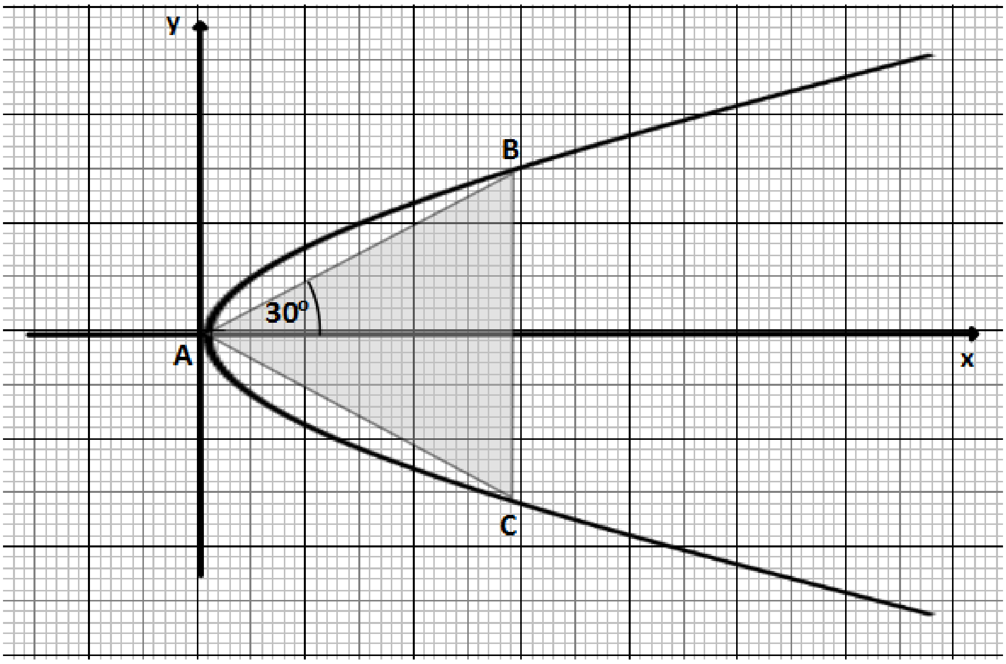
Průsečíky s osou x: do rovnice paraboly dosadit y = 0 a řešit kvadratickou rovnici

$$2x^2 - 6x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 24}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2} \Rightarrow B\left[\frac{3 + \sqrt{15}}{2}; 0\right], C\left[\frac{3 - \sqrt{15}}{2}; 0\right]$$



5) Určete souřadnice vrcholů a délku strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného do paraboly $y^2 = 5x$ tak, že jeden vrchol trojúhelníka splývá s vrcholem paraboly.

Řešení:



Z obrázku je patrné, že body B a C mají stejnou x-ovou souřadnici a jejich y-ové souřadnice jsou opačná čísla. Přímka AB má směrový úhel 30° a tedy rovnici $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Souřadnice bodu B určíme, vyřešíme-li soustavu rovnic:

$y^2 = 5x \ a \ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \ \Rightarrow$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 5x \ \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 5x = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 15x = 0 \ \Rightarrow x(x-15) = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 0, x_2 = 15$

Dopočítáme y-ové souřadnice $\Rightarrow \ y_1 = 0, y_2 = 5\sqrt{3}$

Vrcholy trojúhelníka mají souřadnice: $A[0;0], B\left[15; 5\sqrt{3}\right], C\left[15; -5\sqrt{3}\right]$

Zbývá určit velikost strany trojúhelníka.

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{15^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{225 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

---

6) Určete nejkratší vzdálenost bodu na parabole $y^2 = 10x$ od přímky p: $2x - y + 2 = 0$.

Řešení:

Nejkratší vzdáleností je vzdálenost dané přímky p od bodu dotyku T tečny paraboly t rovnoběžné s přímkou p.

Přímka p a tečna paraboly t s ní rovnoběžná budou mít stejné směrnice.

Směrnicový tvar přímky p: $y = 2x + 2 \ \Rightarrow \ k_p = 2$

Rovnice tečny t k dané parabole bude mít tvar: $yy_T = 5(x + x_T) \Rightarrow y = \frac{5}{y_T}(x + x_T) \Rightarrow$ $k_t = \frac{5}{y_T}$

Porovnáním obou směrnic vypočítáme y-ovou souřadnici bodu dotyku: $y_T = \frac{5}{2}$

Bod dotyku leží na parabole, proto z její rovnice určíme x-ovou souřadnici bodu dotyku:

$$x_T = \frac{y_T^2}{10} \Rightarrow x_T = \frac{5}{8}$$

Bod dotyku má souřadnice: $T\left[\frac{5}{8}; \frac{5}{2}\right]$

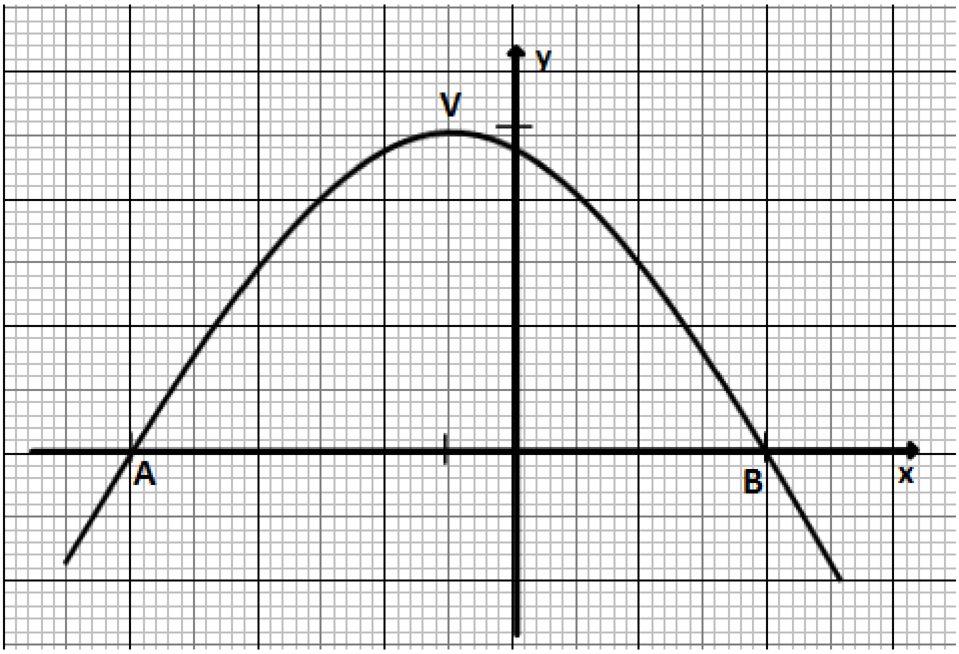
Vypočítáme vzdálenost bodu T od přímky p.

$$|Tp| = \frac{|ax_T + by_T + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|2 \cdot \frac{5}{8} - \frac{5}{2} + 2\right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{4\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

---

7) Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s některou souřadnicovou osou, vrchol $V[-1; 5]$ a na ose x vytíná tětivu o délce 10.

Řešení:



Zakreslíme-li si situaci, bude řešení snadné.

Parabola má rovnici ve tvaru: $(x - m)^2 = -2p(y - n)$

Souřadnice vrcholu jsou dané, zbývá určit parametr p.

Jestliže tětiva na ose x má velikost 10, tak body A a B mají souřadnice: $A[-6; 0], B[4; 0]$

Dosadíme-li nyní do rovnice paraboly souřadnice vrcholu a jednoho z bodů A, B, vypočítáme parametr p.

$(4 + 1)^2 = -2p(0 - 5) \Rightarrow p = 2{,}5$

Rovnice paraboly: $(x + 1)^2 = -5(y - 5)$

Příklady k procvičování:

1) Napište vrcholovou rovnici paraboly, je-li dáno:

a) ohnisko $F[5;-3]$ a rovnice řídící přímky $d: y=-1$,

b) vrchol $V[3;-4]$ a rovnice řídící přímky $d: x=5$,

c) vrchol $V[-2;1]$ a ohnisko $F[-2;4]$,

d) vrchol $V[-4;-2]$, bod A$[-1;2]$ a osa paraboly rovnoběžná s osou x.

(správné řešení: a) $(x-5)^2=-4(y+2)$; b) $(y+4)^2=-8(x-3)$;
c) $(x+2)^2=12(y-1)$; d) $(y+2)^2=\frac{16}{3}(x+4)$)

2) Určete parametr, souřadnice vrcholu a ohniska, rovnici osy a rovnici řídící přímky paraboly $y^2-7x-6y-19=0$.

(správné řešení: $p=\frac{7}{2}; V[-4;3]; F\left[-\frac{9}{4};3\right]; o: y=3; d: x=-\frac{23}{4}$)

3) Napište vrcholovou rovnici paraboly ($o \parallel x^+$), jsou-li dány její tři body: $A[-5;3], B[1;9], C\left[-\frac{7}{2};6\right]$.

(správné řešení: $(y-3)^2=6(x+5)$)

4) Vyšetřete vzájemnou polohu paraboly $y^2=9x$ a přímky $3x-7y+30=0$. A pokud existují společné body, určete jejich souřadnice.

(správné řešení: přímka je sečnou, $A[4;6], B[25;15]$)

5) Napište rovnici tečny paraboly $y^2-8x-6y-63=0$ v bodě dotyku $T[-1;?]$.

(správné řešení: $x-2y+23=0, x+2y+11=0$)

6) Napište rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadné, s osou v ose x, jestliže se dotýká přímky $p: 2x+3y+18=0$.

(správné řešení: $y^2=16x$)

7) Ve kterém svém bodě má parabola $y^2=10x$ tečnu svírající s osou x úhel $\varphi=45°$.

(správné řešení: $T_1\left[\frac{5}{2};5\right], T_2\left[\frac{5}{2};-5\right]$)

8) Napište rovnice tečen paraboly $y^2=8x$ vedených z bodu $M[-7;5]$. Pak určete, jak velký úhel tečny svírají.

(správné řešení: $2x-7y+49=0, x+y+2=0, \varphi=60°57'$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.