INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

POJEM VZDÁLENOST V ANALYTICKÉ GEOMETRII

Autor	Iva Kašparová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	6. 10. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá vzdálenost bodu od přímky a roviny a vzdálenost přímek a rovin, počítá jejich velikost a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

POJEM VZDÁLENOST V ANALYTICKÉ GEOMETRII

Příklad 1

Napište rovnici přímky p, která prochází bodem A[1;2] a má od bodu B[1;-1] vzdálenost

$d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Řešení:

Hledaná přímka prochází bodem A, její rovnice tedy je: $p: a + 2b + c = 0$*, odtud* $c = -a - 2b$

Pro vzdálenost bodu B od přímky p platí: $d = \frac{|a - b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Výraz $\sqrt{a^2 + b^2}$ *vyjadřuje velikost vektoru kolmého k přímce p. Zvolíme jednotkový vektor, platí tedy:* $\sqrt{a^2 + b^2 = 1}$ *a tedy i* $a^2 + b^2 = 1$.

Dosazením do vztahu pro vzdálenost B od p dostaneme: $|-3b| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$*, kde tedy* $b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$*. Odtud plyne, že výsledky pro proměnné a, b, c jsou:*

1) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{\sqrt{2}}{2}, c = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{\sqrt{2}}{2}, c = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$
4) $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Z 1) a 4) plyne stejná rovnice $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ***tj.: x - y + 1 = 0.***

Z 2) a 3) plyne stejná rovnice $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ***tj.: x + y - 3 = 0.***

Příklad 2

Vypočítejte vzdálenost bodu A[6;-6;5] od přímky p = {[4;1-6t;4-6t], t ∊ R}.

Řešení:

Existují 3 způsoby řešení:

1. ***způsob:***

Platí, že |Ap|= |AP|, kde P je pata kolmice vedené bodem A k přímce p. Platí tedy P[4;1-6t;4-6t], t ϵ R. Směrový vektor přímky AP má souřadnice $\vec{v} = (2;-7+6t;1+6t)$, *směrový vektor přímky p je* $\vec{u} = (0;-6;-6)$, *protože* $u \perp v$ *platí:* $u.v = 0$. *Tedy 2.0 - 6.(-7+6t)-6.(1+6t) = 0 odtud* $t = \frac{1}{2}$ *a bod **P[4;-2;1].***

|Ap|= |AP| $= \sqrt{36} = 6$.

2. ***způsob:***

   *Bodem A vedeme rovinu σ kolmou k přímce p. Směrový vektor přímky p je normálovým vektorem roviny σ, zároveň platí A ϵ σ ⇒ σ: -6y - 6z - 6 = 0 tj.: **σ: y + z + 1 = 0.** Průsečík P roviny σ a přímky p získáme dosazením parametrického vyjádření přímky p do obecné rovnice roviny σ, tedy: 1 - 6t + 4 - 6t + 1 = 0 odtud* $t = \frac{1}{2}$ *a průsečík **P [4;-2;1].***

   *A opět: **|Ap|= |AP|*** $= \sqrt{36} = 6$.

3. ***způsob:***

   Vzdálenost bodu A od přímky p je minimální velikost úsečky AX, kde Xϵp. Platí X[4;1-6t;4-6t], tedy: $|AX| = \sqrt{(6-4)^2 + (-6-1+6t)^2 + (5-4+6t)^2} = 3\sqrt{8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 4}$. *Tato funkce proměnné t nabývá svého minima pro* $t = \frac{1}{2}$, *a průsečík **X [4;-2;1].***

   *A opět: **|Ap|= |AX|*** $= \sqrt{36} = 6$.

Příklad 3

Jsou dány roviny α = {[2s; 2t; 2-t-s], t, s ϵ R}, β = {[1-u-2v; u; v], u, v ϵ R}. Ověřte, že roviny α a β jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost.

Řešení:

Určíme obecné rovnice rovin α a β .

Pomocí vektorového součinu směrových vektorů roviny α $\vec{u}_\alpha = (0;2;-1), \vec{v}_\beta = (2;0;-1)$ *dostaneme normálový vektor roviny α* $n_\alpha = \vec{u}_\alpha \times \vec{v}_\beta = (1;1;2)$ *a A[0;0;2] ϵ α*

*tedy **α: x + y + 2z - 4 = 0.***

*Podobně dostaneme obecnou rovnici **β: x + y + 2z - 1 = 0.***

Pro normálové vektory platí: $n_\alpha = n_\beta$, ***tedy platí α||β.***

Vzdálenost rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od roviny druhé, platí tedy: $|\alpha\beta| = |A\beta| = \frac{|2.2-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Úlohy k procvičení:

1) Jsou dány body A[1;-2;-2], B[2;-1;-1], C[1;-1;-2], M[0;2;-2].
   a) Vypočítejte vzdálenost bodu M od roviny ABC.
   b) Najděte obraz M’ bodu M v osové souměrnosti podle přímky AB.

   [a) $\left| A\alpha \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *, b) M’[4;-4;0]].*

2) Najděte rovnici přímky p, která prochází bodem A[2;3] a má od bodu B[0;-1] vzdálenost v = 4.

   [$p_1 : 4x + 3y - 17 = 0,\ p_2 : y - 3 = 0$ *].*

3) V trojúhelníku ABC vypočítejte velikost výšky na stranu a, je-li: A[1;2;3], B[3;6;2], C[-1;10;-2].

   [$v_a = 3\sqrt{2}$ *].*

4) Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek p = {[1-t; 1+2t;-t], tϵR}, q = {[2+s;1-2s;2+s], sϵR}.

   [$\left| pq \right| = \frac{1}{2}\sqrt{14}$ *].*

5) Vypočítejte vzdálenost bodu A[4;2;-3] od roviny σ: 2x - 2y + z + 5 = 0.

   [$\left| A\sigma \right| = 2$ *].*

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.