Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

LIMITA POSLOUPNOSTI

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	9. prosince 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a úlohy k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem limity posloupnosti a umí jej aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Příklad 1

Určete limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n+5}.$$

Řešení

Při výpočtu této limity použijeme úpravu zlomku tak, že čitatele i jmenovatele vydělíme výrazem *n* a potom použijeme pro výpočet věty o limitách posloupností:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{3n+1}}{\mathbf{6n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{6+\frac{5}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{5}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}6+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}=\frac{3+0}{6+0}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Příklad 2

Vypočítejte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+2}{2n^3+n-1}.$$

Řešení

Čitatele i jmenovatele zlomku vydělíme výrazem n^3 (nejvyšší mocninou vyskytující se u *n*) a potom budeme postupovat stejně jako v předešlém příkladu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{5n^2+3n+2}}{\mathbf{2n^3+n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{2+0-0}=\frac{0}{2}=\mathbf{0}$$

Příklad 3

Vypočítejte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-4}\right)^4.$$

Řešení

Při výpočtu této limity využijeme větu o limitě součinu posloupností a obdobným postupem jako u 1. příkladu dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathbf{2n+3}}{\mathbf{3n-4}}\right)^{\mathbf{4}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-4}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{4}{n}}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\mathbf{\frac{16}{81}}$$

Příklad 4

Vypočítejte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 3^n - 2\cdot 5^n}{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n}.$$

Řešení

Posloupnosti $(3^n)_{n=1}^{\infty}$ a $(5^n)_{n=1}^{\infty}$ jsou divergentní, ale posloupnost $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a má limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$. Proto čitatele i jmenovatele daného zlomku vydělíme výrazem 5^n a vypočítáme:

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 3^n - 2\cdot 5^n}{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2}{2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3} = \frac{0-2}{0+3} = -\mathbf{\frac{2}{3}}$$

Příklad 5

Rozhodněte, zda je daná posloupnost konvergentní. V kladném případě vypočítejte její limitu:

$$\left(\frac{3n^2+4n+5}{2n^3-n+4}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení

Na zadanou posloupnost se podíváme v tomto případě jinak. Představíme si, že v čitateli se nachází polynom $P(x)$, jehož stupeň je $st\,P(x) = 2$, ve jmenovateli máme polynom $Q(x)$, jehož stupeň je $st\,Q(x) = 3$.

Protože platí

$$st\,P(x) \ < st\,Q(x),$$

je celá posloupnost

$$\left(\frac{3n^2+4n+5}{2n^3-n+4}\right)_{n=1}^{\infty}$$

konvergentní a pro její limitu platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+5}{2n^3-n+4} = 0.$$

Úlohy k procvičení

1. Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2}$$

$$\left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right]$$

2. Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-7n+1}{1-3n^3}$$

$$\left[-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right]$$

3. Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-3n}{5n+6}\right)^3$$

$$\left[-\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{125}}\right]$$

4. Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}+\frac{2n-n^2}{2n^2}\right)$$

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$$

5. Pro která $x \in \boldsymbol{R}$ je posloupnost rostoucí, resp. klesající?

$$\left(\frac{x\cdot n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$[\mathbf{rostouc}\text{í}, \mathbf{je.\,li}\ \boldsymbol{x}>\mathbf{0}; \mathbf{klesaj}\text{í}\mathbf{c}\text{í}, \mathbf{je}-\mathbf{li}\ \ \boldsymbol{x}<\mathbf{0}]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.