Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	2. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák aplikuje význam absolutní hodnoty řeší rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené úlohy:

1. Řešte v R rovnici: $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$

   Řešení:

   a) najdeme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

   $x-2=0 \Leftrightarrow x=2; \quad x-3=0 \Leftrightarrow x=3; \quad 2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$

   b) určíme znaménko výrazů v absolutních hodnotách v jednotlivých intervalech určených nulovými body:

	$(-\infty;2)$	$\langle 2;3)$	$\langle 3;4)$	$(4;\infty)$
$x-2$	-	0 +	+	+
$x-3$	-	-	0 +	+
$2x-8$	-	-	-	0 +
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$x-2$	$x-2$	$x-2$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	$3-x$	$x-3$	$x-3$
$\lvert 2x-8\rvert$	$8-2x$	$8-2x$	$8-2x$	$2x-8$

   c) Na základě definice absolutní hodnoty (je-li $a \geq 0,\ pak\ |a|=a,$ je- li $a<0,\ pak\ |a|=-a$) určíme, jak bude výraz vypadat po odstranění absolutní hodnoty (pokud je výraz v daném intervalu kladný, můžeme odstranit absolutní hodnotu, jestliže je záporný, je nutno absolutní hodnotu výrazu zaměnit za výraz opačný.

   Budeme tedy řešit rovnici v jednotlivých intervalech:

   I) $x \in (-\infty;2)$:

   $$2-x+3-x+8-2x=9$$
   $$-4x=-4$$
   $$x=1$$
   $$1 \in (-\infty;2) \Rightarrow K_1=\{1\}$$

   II) $x \in \langle 2;3)$:

   $$x-2+3-x+8-2x=9$$
   $$-2x=0$$
   $$x=0$$
   $$0 \notin \langle 2;3) \Rightarrow K_2=\phi$$

   III) $x \in \langle 3;4)$:

   $$x-2+x-3+8-2x=9$$
   $$0x=6$$
   $$K_3=\phi$$

   IV) $x \in (4;\infty)$:

   $$x-2+x-3+2x-8=9$$
   $$4x=22$$
   $$x=\frac{11}{2}$$
   $$\frac{11}{2} \in (4;\infty) \Rightarrow K_4=\left\{\frac{11}{2}\right\}$$

   d) $K=K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \Rightarrow K=\left\{1;\frac{11}{2}\right\}$

2. Řešte v R rovnici: $\left|3-|2-x|\right|=2x$

a) Nejprve podle definice absolutní hodnoty odstraníme „vnitřní“ absolutní hodnotu:
-najdeme opět nulový bod $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$, a určíme znaménko výrazu ve „vnitřní“ absolutní hodnotě v jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;2)$	$\langle 2:\infty)$
$2-x$	+	0 -
$\|2-x\|$	$2-x$	$x-2$

I) v intervalu $(-\infty;2)$ tedy řešíme rovnici:

$$|3-(2-x)|=2x$$
$$|1+x|=2x$$

opět určíme nulový bod, znaménko výrazu v absolutní hodnotě:
$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$
interval $(-\infty;2)$ tedy ještě rozdělíme na dva uvedeným nulovým bodem:

	$(-\infty;-1)$	$\langle -1;2)$
$1+x$	-	0 +
$\|1+x\|$	$-1-x$	$1+x$

i. $x \in (-\infty;-1)$:

$$-1-x=2x$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3} \notin (-\infty;-1) \Rightarrow K_1=\phi$$

ii. $x \in \langle -1;2)$:

$$1+x=2x$$
$$x=1$$
$$1 \in \langle -1;2) \Rightarrow K_2=\{1\}$$

II) v intervalu $\langle 2;\infty)$ tedy řešíme rovnici:

$$|3-(x-2)|=2x$$
$$|5-x|=2x$$

opět určíme nulový bod, znaménko výrazu v absolutní hodnotě:
$5-x=0 \Leftrightarrow x=5$
interval $\langle 2;\infty)$ tedy ještě rozdělíme na dva uvedeným nulovým bodem:

	$\langle 2;5)$	$\langle 5;\infty)$
$5-x$	+	0 -
$\|5-x\|$	$5-x$	$x-5$

i. $x \in \langle 2;5) :$

$$5 - x = 2x$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$
$$\frac{5}{3} \notin \langle 2;5) \Rightarrow K_3 = \phi$$

ii. $x \in \langle 5;\infty) :$

$$x - 5 = 2x$$
$$x = -5$$
$$-5 \notin \langle 5;\infty) \Rightarrow K_4 = \phi$$

b) $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \Rightarrow K = \{1\}$

3. V R řešte rovnici: $\left|x^2 + 3x\right| - 4 = 0$
   a) najdeme nulové body výrazu v absolutní hodnotě:

      výraz si upravíme: $x^2 + 3x = x(x+3)$

      $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -3)$
   b) určíme znaménko výrazu v absolutní hodnotě v jednotlivých intervalech určených nulovými body:

	$(-\infty;-3)$	$\langle -3;0)$	$\langle 0;\infty)$
x	-	-	0 +
$x+3$	-	0 +	+
$x(x+3)$	+	-	+
$\left|x(x+3)\right| = \left|x^2+3x\right|$	x^2+3x	$-x^2-3x$	x^2+3x

   c) Na základě definice absolutní hodnoty (je-li $a \geq 0,\ pak\ \left|a\right| = a,$ je- li $a < 0,\ pak\ \left|a\right| = -a$) určíme, jak bude výraz vypadat po odstranění absolutní hodnoty.

      Budeme tedy řešit rovnici v jednotlivých intervalech:

      I) $x \in (-\infty;-3) \cup \langle 0;\infty) :$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x+4)(x-1) = 0$$
$$x_1 = -4; x_2 = +1$$
$$K_1 = \left[x \in (-\infty;-3) \cup \langle 0;\infty)\right] \cap \{-4;1\} = \{-4;1\}$$

      II) $x \in \langle -3;0) :$

$$-x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x^2 + 3x + 4 = 0$$
$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$$
$$K_2 = \phi$$

   d) $K = K_1 \cap K_2 = \{-4;1\}$

4. Řešte v R rovnici: $\frac{|x-2|}{|x+6|} = \frac{|x+1|}{|x-4|}$

a) Určíme podmínky: $x \neq -6;\ x \neq 4$ a vynásobíme obě strany rovnice výrazem $|x+6| \cdot |x-4|$ vznikne rovnice:

$$|x-2| \cdot |x-4| = |x+1| \cdot |x+6|$$

najdeme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2; \quad x+6=0 \Leftrightarrow x=-6; \quad x+1=0 \Leftrightarrow x=-1: \quad x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

zjistíme znaménko výrazů v absolutních hodnotách v jednotlivých intervalech určených nulovými body:

	$(-\infty;-6)$	$\langle -6;-1)$	$\langle -1;2)$	$\langle 2;4)$	$\langle 4;\infty)$
$x-2$	-	-	-	0 +	+
$x-4$	-	-	-	-	0 +
$x+1$	-	-	0 +	+	+
$x+6$	-	0 +	+	+	+
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$2-x$	$2-x$	$x-2$	$x-2$
$\lvert x-4\rvert$	$4-x$	$4-x$	$4-x$	$4-x$	$x-4$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x+6\rvert$	$-x-6$	$x+6$	$x+6$	$x+6$	$x+6$

b) Na základě definice absolutní hodnoty (je-li $a \geq 0,\ pak\ |a| = a,$ je- li $a < 0,\ pak\ |a| = -a$) určíme, jak bude výraz vypadat po odstranění absolutní hodnoty.

Budeme tedy řešit rovnici v jednotlivých intervalech:

I) $x \in (-\infty - 6)$:

$$(2-x)(4-x) = (-x-1)(-x-6)$$
$$8-4x-2x+x^2 = x^2+6x+x+6$$
$$-13x = -2$$
$$x = \frac{2}{13}$$
$$\frac{2}{13} \notin (-\infty;-6) \Rightarrow K_1 = \phi$$

II) $x \in \langle -6;-1)$:

$$(2-x)(4-x) = (-x-1)(x+6)$$
$$8-6x+x^2 = -x^2-7x-6$$
$$2x^2+x+14 = 0$$
$$D = 1-96 < 0$$
$$K_2 = \phi$$

III) $x \in \langle -1; 2)$:

$$(2-x)(4-x) = (x+1)(x+6)$$
$$8 - 6x + x^2 = x^2 + 7x + 6$$
$$-13x = -2$$
$$x = \frac{2}{13}$$
$$\frac{2}{13} \in \langle -1; 2) \Rightarrow K_3 = \left\{\frac{2}{13}\right\}$$

IV) $x \in (2;4)$:

$$(x-2)(4-x) = (x+1)(x+6)$$
$$6x - 8 - x^2 = x^2 + 7x + 6$$
$$2x^2 + x + 14 = 0$$
$$D = 1 - 96 < 0$$
$$K_4 = \phi$$

V) $x \in (4;\infty)$:

$$(x-2)(x-4) = (x+1)(x+6)$$
$$x^2 - 6x + 8 = x^2 + 7x + 6$$
$$-13x = -2$$
$$x = \frac{2}{13}$$
$$\frac{2}{13} \notin (4;\infty) \Rightarrow K_5 = \phi$$

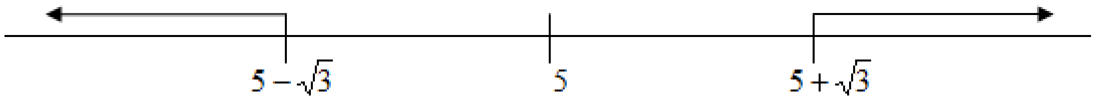
c) $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \Rightarrow K = \left\{\frac{2}{13}\right\}$. Řešení vyhovuje podmínce.

5. Řešte v R nerovnici: $|x-5| \geq \sqrt{3}$

   Tuto rovnici nejsnáze vyřešíme pomocí definice absolutní hodnoty rozdílu dvou čísel. Na levé straně je pouze absolutní hodnota rozdílu dvou čísel a na pravé straně potom reálné číslo.

   Najdeme nejprve nulový bod absolutní hodnoty: $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

   Hledáme čísla, jejichž obrazy mají na číselné ose od obrazu čísla 5 vzdálenost větší nebo rovnu $\sqrt{3}$



$K = (-\infty : 5 - \sqrt{3}\rangle \cup \langle 5 + \sqrt{3}; \infty)$

6. Řešte v R nerovnici: $|x-2| \leq 2|x|-3$

a) najdeme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2; \quad x=0$

b) určíme znaménko výrazů v absolutních hodnotách v jednotlivých intervalech určených nulovými body:

	$(-\infty;0)$	$\langle 0;2)$	$\langle 2;\infty)$
$x-2$	-	-	0 +
x	-	0 +	+
$\|x-2\|$	$2-x$	$2-x$	$x-2$
$\|x\|$	$-x$	x	x

c) Na základě definice absolutní hodnoty (je-li $a \geq 0,\ pak\ |a|=a,$ je- li $a<0,\ pak\ |a|=-a$) určíme, jak bude výraz vypadat po odstranění absolutní hodnoty

Budeme tedy řešit rovnici v jednotlivých intervalech:

I) $x \in (-\infty;0)$:

$$2-x \leq -2x-3$$
$$x \leq -5$$
$$K_1 = (-\infty;0) \cap (-\infty;-5\rangle$$
$$K_1 = (-\infty;-5\rangle$$

II) $x \in \langle 0;2)$:

$$2-x \leq 2x-3$$
$$-3x \leq -5$$
$$x \geq \frac{5}{3}$$
$$K_2 = \langle 0;2) \cap \left\langle \frac{5}{3};\infty\right)$$
$$K_2 = \left\langle \frac{5}{3};2\right\rangle$$

III) $x \in \langle 2;\infty)$:

$$x-2 \leq 2x-3$$
$$-x \leq -1$$
$$x \geq 1$$
$$K_1 = \langle 2;\infty) \cap \langle 1:\infty)$$
$$K_3 = \langle 2;\infty)$$

d) $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \Rightarrow K = (-\infty;-5\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3};\infty\right)$

Úlohy k procvičení:

1. Řešte v R rovnice:

a) $|x-2|\cdot|x+1|=5$ [$\{-2;3\}$]

b) $|x-1|+3|2-x|=x-|1-x|$ [$\{2\}$]

c) $|x+1|-|x|+3|x-1|=2|x-2|+x+2$ [$\{-2\}\cup\langle 2;\infty)$]

d) $||x+1|-3|=1$ [$\{-5;-3;1;3\}$]

e) $|x^2+4x|-3x=6$ [$\{-1;2\}$]

f) $|x^2+2x-1|=x+1$ [$\{0;1\}$]

g) $|x^2-2x+2|=5$ [$\{-1;3\}$]

2. Řešte v R nerovnice:

a) $|x-3|<2+\sqrt{5}$ [$\left(1-\sqrt{5};5+\sqrt{5}\right)$]

b) $|1-2x|+|2+3x|<11$ [$\left(-\frac{12}{5};2\right)$]

c) $5|x-1|-3|x-2|+|4-x|>5-x$ [$(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)\cup\langle 2;\infty)$]

d) $\dfrac{|3x+2|}{|x+1|}\geq 2$ [$(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{4}{5}\right\rangle\cup\langle 0;\infty)$]

e) $|x^2+4x|\leq 3x+6$ [$\langle -1;2\rangle$]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.
JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. 4. vydání. Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-076-4.
KOVÁČIK, Jan. *Řešené příklady z matematiky pro střední školy*. 1 vydání. Praha: ASPI Publishing, 2001. ISBN 80-7357-005-X.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.