Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	7. prosince 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a úlohy k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem geometrické posloupnosti a umí jej aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Příklad 1

Určete všechny geometrické posloupnosti, u nichž je součet prvního a čtvrtého členu 18 a součet druhého a třetího členu je 12. Dále vypočítejte součet první 6 členů takové posloupnosti.

Řešení

Pro hledané geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$a_1 + a_4 = 18 \qquad\qquad a_2 + a_3 = 12.$$

Přitom ale víme, že $a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_1 \cdot q^2$ a $a_4 = a_1 \cdot q^3$, kde q je kvocient geometrické posloupnosti. Dosadíme tedy do předchozích rovnic a získáme tak soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé, tj.

$$a_1 + a_1 \cdot q^3 = 18 \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot (1 + q^3) = 18$$

$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot q\ (1 + q) = 12.$$

Dělíme-li nyní první získanou rovnici rovnicí druhou, dostáváme

$$\frac{(1 + q^3)}{q\ (1 + q)} = \frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{3}{2}$$

a po úpravě máme kvadratickou rovnici

$$2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

Jejím řešením jsou dva reálné různé kořeny $q_1 = 2$ a $q_2 = \frac{1}{2}$. Tomu odpovídají první členy $a_{11} = 2$ a $a_{12} = 16$.

Daným podmínkám vyhovují právě dvě geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jejichž kvocienty a první členy jsou

a) $\boldsymbol{q = 2;\ a_1 = 2\ \ (2, 4, 8, 16, 32, \dots)}$,
b) $\boldsymbol{q = \frac{1}{2};\ a_1 = 16\ \ \ (16, 8, 4, 2, 1, \dots)}$

Dále máme určit součet prvních šesti členů nalezených posloupností. Obecně platí

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a pro naše dvě řešení vychází

a) $\boldsymbol{s_6 = 126}$,
b) $\boldsymbol{s_6 = \frac{63}{2}}$.

Příklad 2

Poločas přeměny rádia typu C (Ra_c) je přibližně 20 minut. Kolik materiálu zbude bez přeměny z 1 g vzorku po 6 hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně u poloviny jader atomů látky.)

Řešení

Po 20 minutách zbude z původního množství polovina, která se nepřeměnila. Za dalších 20 minut zbude z předchozího množství jedna polovina, celkem tedy polovina poloviny. Tak bychom mohli pokračovat dále, ale je zřejmé, že množství nepřeměněné látky tvoří geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Za šest hodin proběhne celkem 18 přeměn a ze vztahu

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^n$$

vyplývá

$$a_n = a_1 \cdot q^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \text{g} \doteq \mathbf{3{,}81 \cdot 10^{-6} g}.$$

Po šesti hodinách zbude přibližně $3{,}81 \cdot 10^{-6}$g z původního množství materiálu.

Příklad 3

Nákupní cena automobilu byla 400 000 Kč. Každý měsíc se jeho hodnota sníží o 2,16% ceny automobilu z předchozího měsíce (*amortizace*). Jaká bude cena automobilu po 4 letech?

Řešení

Cena automobilu na konci jednotlivých měsíců tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 - \frac{p}{100}$, kde *p* je odepisované procento, a s prvním členem $a_1 = 400\,000$. Zůstatková hodnota automobilu po 4 letech (tj. 48 měsících) používání potom vychází na začátku 49. měsíce

$$a_{49} = a_1 \cdot q^{48} = 400\,000 \cdot \left(1 - \frac{2{,}16}{100}\right)^{48} \text{Kč} \doteq \mathbf{140\,233\ K}\text{č}.$$

Příklad 4

Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí

$$a_2 \cdot a_3 = 9\,;\ a_2 + a_3 = 10$$

Řešení

K řešení této úlohy můžeme použít dva způsoby.

1. *způsob*

   Nejprve vypočítáme a_2 a a_3 jako řešení soustavy rovnic a potom určíme pomocí vztahů platících v geometrické posloupnosti první člen a kvocient. Tedy

$$a_2 \cdot a_3 = 9 \qquad (1)$$
$$a_2 + a_3 = 10. \qquad (2)$$

Z rovnice (2) je

$$a_2 = 10 - a_3$$

a dosazením do rovnice (1) získáváme

$$10a_3 - a_3^2 = 9.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení a to

$a)\ a_3 = 1 \qquad b)\ a_3 = 9.$

Tomu odpovídají dvě řešení pro a_2 a to

$a)\ a_2 = 9 \qquad b)\ a_2 = 1.$

Nyní použijeme vztah $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a pro vypočtená a_2, a_3 dostáváme

a) $a_1 \cdot q = 9$
$a_1 \cdot q^2 = 1.$

Vydělíme-li druhou rovnici první rovnicí, vypočítáme $\boldsymbol{q = \frac{1}{9};\ a_1 = 81}$.

b) $a_1 \cdot q = 1$
$a_1 \cdot q^2 = 9.$

Obdobně jako v případě a) vypočítáme $\boldsymbol{q = 9;\ a_1 = \frac{1}{9}}$.

2. *Způsob*

Určíme si $a_2 = a_1 \cdot q;\ a_3 = a_1 \cdot q^2$ a dosadíme do zadaných rovnic. Takže

$$a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 = 9 \rightarrow a_1^2 \cdot q^3 = 9 \qquad (1)$$

$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 10. \qquad (2)$$

Z rovnice (2) vyjádříme

$$a_1 = \frac{10}{q \cdot (1+q)} \qquad (3)$$

a dosadíme do rovnice (1)

$$\frac{100}{q^2 \cdot (1+q)^2} \cdot q^3 = 9$$

$$9q^2 - 82q + 9 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{82 \pm \sqrt{82^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} \rightarrow q_1 = 9;\ q_2 = \frac{1}{9}.$$

Potom dosazením do rovnice (3) získáme dvě řešení:

a) $\boldsymbol{q = 9;\ a_1 = \frac{1}{9}}$. b) $\boldsymbol{q = \frac{1}{9};\ a_1 = 81}$.

Příklad 5

Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 6% své intenzity. Kolik desek je potřeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na jednu třetinu původní hodnoty?

Řešení

Označme původní intenzitu světla *I*. Intenzitu světla po průchodu skleněnou deskou můžeme vyjádřit následovně:

Po průchodu 1. deskou $I - 0{,}06\,I = 0{,}94\,I$

Po průchodu 2. deskou $0{,}94\,I - 0{,}94\,I \cdot 0{,}06 = 0{,}94^2\,I$

Po průchodu 3. deskou $0{,}94^3\,I$

Po průchodu n-tou deskou $0{,}94^n\,I$.

Po průchodu n-tou deskou má být intenzita světla snížená alespoň na jednu třetinu původní hodnoty:

$$0{,}94^n\,I \leq \frac{1}{3}\,I.$$

Tím jsme sestavili nerovnici o neznámé *n*. Můžeme ji vydělit *I*, protože se jedná o intenzitu světla a platí tedy $I > 0$. Tedy:

$$0{,}94^n \leq \frac{1}{3}$$

$$n \cdot \log 0{,}94 \leq \log\frac{1}{3}$$

$$n \leq \frac{\log\frac{1}{3}}{\log 0{,}94}$$

$$n \geq 17{,}75$$

$$\boldsymbol{n \doteq 18}$$

Aby se intenzita světla snížila alespoň na jednu třetinu původní hodnoty, je potřeba, aby prošlo minimálně 18ti deskami.

Úlohy k procvičení

1. Určete všechny geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro které platí:

$$a_1 - a_2 = 2; \quad a_3 - a_4 = 8$$

$$\begin{bmatrix} \textbf{dvě řešení} \\ \boldsymbol{a)\ a_1 = -2, q = 2} \\ \boldsymbol{b)\ a_1 = \frac{1}{3}, q = -2} \end{bmatrix}$$

2. Určete všechny geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro které platí:

$$a_1 = 3, a_9 - a_5 = 36,$$

a vypočítejte součet prvních deseti členů.

$$\begin{bmatrix} \textbf{dvě řešení} \\ \boldsymbol{a)\ a_1 = 3, q = \sqrt{2}, s_{10} = 93(1+\sqrt{2})} \\ \boldsymbol{b)\ a_1 = 3, q = -\sqrt{2}, s_{10} = 93(1-\sqrt{2})} \end{bmatrix}$$

3. Bakterie se množí dělením tak, že k tomuto jejich dělení dochází za příznivých podmínek vždy jednou za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne z jedné bakterie za 10 hodin?

$$[\boldsymbol{p_{20} = 2^{20} = 1\,048\,576}]$$

4. Určete, před kolika lety byly vytvořené nástěnné malby, zjistili-li jsme, že organické zbytky obsahovaly 0,153krát menší koncentraci radiouhlíku C_{14} ve srovnání s jeho koncentrací v živých organismech. Poločas přeměny radiouhlíku je 5 730 roků.

$$[\textbf{15 500 let}]$$

5. Přičteme-li k číslům 3, 10, 24 totéž číslo, vzniknou první tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tato čísla.

$$[\boldsymbol{7, 14, 28}]$$

6. Čísla, jimiž jsou v centimetrech vyjádřené délky hran kvádru, tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Kvádr má objem $V = 216\ cm^3$. Součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu kvádru je 21 cm. Určete délky hran kvádru.

$$[\boldsymbol{3\ cm, 6\ cm, 12\ cm}]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.