Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	7. duben 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem aritmetické posloupnosti a umí jej aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Aritmetické posloupnosti

Příklad 1

Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí $a_2 + a_4 = 6$ a $a_2^2 + a_4^2 = 20$.

Řešení

Pomocí diference d a prvního členu a_1 si vyjádříme členy a_2 a a_4 a dosadíme do zadaných vztahů. Tedy:

$$a_2 = a_1 + d, a_4 = a_1 + 3d$$

a

$$a_1 + d + a_1 + 3d = 6$$
$$(a_1 + d)^2 + (a_1 + 3d)^2 = 20$$

Tím jsme si převedli úlohu na řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými a_1 a d.

$$2a_1 + 4d = 6$$
$$a_1^2 + 2a_1 d + d^2 + a_1^2 + 6a_1 d + 9d^2 = 20$$

Po úpravách

$$a_1 + 2d = 3$$
$$a_1^2 + 4a_1 d + 5d^2 = 10$$

$$a_1 = 3 - 2d$$
$$(3 - 2d)^2 + 4(3 - 2d)d + 5d^2 = 10$$

$$9 - 12d + 4d^2 + 12d - 8d^2 + 5d^2 = 10$$
$$d^2 - 1 = 0$$
$$(d - 1)(d + 1) = 0$$

Odtud máme dvě řešení pro neznámou d a to

$$\boldsymbol{d_1 = 1}, \text{ potom } \boldsymbol{a_1 = 1}$$

nebo

$$\boldsymbol{d_2 = -1}, \text{ potom } \boldsymbol{a_1 = 5}$$

Úloze vyhovují dvě aritmetické posloupnosti.

Příklad 2

V aritmetické posloupnosti (AP) je $a_1 = 4, d = 3$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 200?

Řešení

Pro součet prvních n členů AP platí $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$. Vyjádříme n-tý člen posloupnosti jako $a_n = a_1 + (n - 1)d$ a provedeme součet prvních n členů o němž víme, že musí být větší než 200. Tedy

$$\frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_1 + (n - 1)d] > 200$$

Nyní dosadíme za a_1 a d a řešíme nerovnici pro neznámou n:

$$\frac{n}{2} \cdot [4 + 4 + (n - 1) \cdot 3] > 200$$
$$\frac{n}{2} \cdot (8 + 3n - 3) > 200$$
$$n \cdot (5 + 3n) > 400$$
$$3n^2 + 5n - 400 > 0$$

Vyřešíme kvadratickou nerovnici

$$n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-400)}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{4825}}{6} \doteq \frac{-5 \pm 69{,}46}{6}$$

a tedy $n < -12{,}41$ nebo $n > 10{,}74$.

Protože se jedná o AP, záporné řešení nevyhovuje.

Je potřeba sečíst alespoň 11 členů zadané AP.

Příklad 3

Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti.

Řešení

Ze zadání vyčteme, že $a_1 = 8$ a $a_5 = 648$. Musíme tedy určit diferenci d a jestliže ji dosadíme do vyjádření pro a_2, a_3 a a_4, najdeme hledaná čísla.

Tedy

$$a_5 = a_1 + 4d$$
$$648 = 8 + 4d$$
$$640 = 4d$$
$$d = 160$$

Po dosazení do vyjádření členů posloupnosti dostáváme

$$a_2 = a_1 + d = 8 + 160 = 168$$
$$a_3 = a_1 + 2d = a_2 + d = 328$$
$$a_4 = a_1 + 3d = 8 + 480 = 488$$

Hledaná čísla jsou 168, 328 a 488.

Příklad 4

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy AP. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Určete délky stran.

Řešení

V této úloze využijeme vztahy mezi členy AP jiným způsobem. Vyjádříme si členy a_1 a a_3 pomocí členu a_2. Tedy

$$a_1 = a_2 - d;\ a_3 = a_2 + d.$$

Podle zadání je

$$3a_2 = 96 \text{ a } a_2 = 32.$$

Nyní využijeme vlastností pravoúhlého trojúhelníku – zde platnosti Pythagorovy věty. Roli přepony zde bude „hrát“ člen a_3, protože je největší.

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$$
$$(32 + d)^2 = (32 - d)^2 + 32^2$$
$$1024 + 64d + d^2 = 1024 - 64d + d^2 + 1024$$
$$128d = 1024$$
$$d = 8$$
$$a_1 = 24, a_2 = 32, a_3 = 40.$$

Hledanými čísly jsou čísla 24, 32 a 40.

Úlohy k procvičení

1. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_1 + a_2 = 5$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 13$$

$$[\boldsymbol{a_1 = 3, d = -1 \; nebo \; a_1 = 2, d = 1}]$$

2. Určete první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 5$, aby platilo $s_{20} \geq 1000$.

$$\left[\boldsymbol{a_1 \geq \frac{5}{2}}\right]$$

3. Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 72 cm. Vypočítejte povrch kvádru, je-li jeho objem 162 cm^3.

$$[\boldsymbol{198\ cm^2;\ délky\ hran\ jsou\ po\ řadě\ 3, 6\ a\ 9\ cm}]$$

4. Tři čísla, která tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, mají součet 45 a součin 3240. Určete tato čísla.

$$[\boldsymbol{12, 15, 18}]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.