Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

# POSLOUPNOSTI (definice, způsoby určení, vlastnosti)

| | |
|---|---|
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 2. listopad 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem posloupnosti a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Příklad 1**

Vyjádřete danou posloupnost pomocí vzorce pro *n* – tý člen: $-\frac{1}{8};\ -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -1; -3, \ldots$

*Řešení*

Tuto posloupnost lze vyjádřit pomocí vzorce $(\boldsymbol{-2^{n-4}})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$

*Pozn.:* Máme-li posloupnost zadanou vzorcem pro *n*-tý člen, lze ji vyjádřit rekurentně a to vždy. Existuje mnoho způsobů, ale postupujeme zpravidla tak, že užitím daného vzorce pro $a_n$ určíme **rozdíl** $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n}$ nebo **podíl** $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}$ (pro $a_n \neq 0$) a odtud potom odvodíme rekurentní vzorec pro $a_{n+1}$.

**Příklad 2**

Danou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané vzorcem pro *n*-tý člen ($n \in \boldsymbol{N}$) vyjádřete rekurentně:

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

*Řešení*

$a_1 = 2$ a dále

a) <u>Rozdílem:</u> $a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$,
b) <u>Podílem:</u> $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot a_n$.
c) Oba odvozené rekurentní vzorce obsahují na pravé straně nejen výraz s $a_n$, ale také s proměnnou *n*. Rekurentní vzorec pro $a_{n+1}$, jehož pravá strana obsahuje jen $a_n$, odvodíme takto:

Vyjdeme z toho, že platí $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_n - 1 = \frac{1}{n}$ a odtud

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + 2(a_n - 1)}{a_n} \Rightarrow \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}}$$

**Příklad 3**

Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou rekurentně $a_1 = 0;\ a_{n+1} = 2 - a_n$ odvoďte vzorec pro *n*-tý člen.

*Řešení*

Z rekurentního vyjádření určíme několik prvních členů posloupnosti a to 0; 2; 0; 2; 0; 2; … . Pro každé liché *n* je $a_n = 0$ a pro sudá *n* je $a_n = 2$. Obecně pro $\forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{a_n = 1 + (-1)^n}$**.**

Důkaz této hypotézy provedeme matematickou indukcí, tedy

*I.* Dokážeme, že pro *n* = 1 vzorec platí: $a_1 = 1 + (-1) = 0$.

*II.* Dokážeme platnost implikace $a_k = 1 + (-1)^k \Rightarrow a_{k+1} = 1 + (-1)^{k+1}$ pro libovolné $k \in \boldsymbol{N}$: Podle daného rekurentního vztahu platí $a_{k+1} = 2 - a_k$ a odtud po dosazení za $a_k$ z implikačního předpokladu plyne důsledek
$a_{k+1} = 2 - [1 + (-1)^k] = 1 - (-1)^k = 1 + (-1)^{k+1}$.

**Příklad 4**

Rozhodněte, zda je následující posloupnost rostoucí příp. klesající. Svoje tvrzení dokažte.

$$\left(\frac{3n-1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

*Řešení*

K řešení této úlohy můžeme využít dva způsoby. Buď použijeme rozdíl $a_{n+1} - a_n$, nebo podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{n+1+2} = \frac{3n+2}{n+3};\ a_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

1. *způsob*
   $a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{n+3} - \frac{3n-1}{n+2} = \frac{(3n+2)(n+2)-(3n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{a_{n+1} > a_n}$,
   takže daná posloupnost je **rostoucí.**
2. *způsob*
   Protože je $a_n > 0\ pro\ \forall n \in \boldsymbol{N}$, můžeme provést
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+2}{n+3} \cdot \frac{n+2}{3n-1} = \frac{3n^2+8n+4}{3n^2+8n-3} > 1 \Rightarrow \boldsymbol{a_{n+1} > a_n}$$
   a daná posloupnost je **rostoucí.**

**Příklad 5**

Vyšetřete, zda je omezená posloupnost $\left(\frac{3n-1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

*Řešení*

Má-li být posloupnost omezená, musí být omezená shora i zdola. Pro $\forall n \in \boldsymbol{N}$ je $\frac{3n-1}{n+2} > 0$, protože $n > \frac{1}{3}$ a také $\frac{3n-1}{n+2} = \frac{3(n+2)-7}{n+2} = 3 - \frac{7}{n+2} < 3$ .

**Takže $\boldsymbol{0 < a_n < 3}$ a daná posloupnost je omezená**

**Úlohy k procvičení**

1. Vyjádřete danou posloupnost pomocí vzorce pro *n* – tý člen: 4; -4; 4; -4; 4; -4, …

$$\left[\left((-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\cdot\mathbf{4}\right)_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}\right]$$

2. Určete prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané vzorcem pro *n*-tý člen $(n \in \boldsymbol{N})$: $\quad a_n = \frac{n+3}{2n}$

$$\left[\mathbf{2};\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}};\ \mathbf{1};\ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}};\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}};\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right]$$

3. Určete prvních pět členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané vzorcem pro *n*-tý člen $(n \in \boldsymbol{N})$: $\quad a_n = \frac{2n-1}{n+1}$

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\ \mathbf{1};\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}};\ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}};\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right]$$

4. Danou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané vzorcem pro *n*-tý člen $(n \in \boldsymbol{N})$ vyjádřete rekurentně: $\quad a_n = \log 10^n$

$$[\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1};\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} + \mathbf{1}]$$

5. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou rekurentně $a_1 = 5;\ a_{n+1} = a_n + 4$ odvoďte vzorec pro *n*-tý člen. Hypotézu dokažte matematickou indukcí.

$$[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{4}\boldsymbol{n} + \mathbf{1}]$$

6. Rozhodněte, zda je následující posloupnost rostoucí příp. klesající. Svoje tvrzení dokažte.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$\left[\boldsymbol{posloupnost\ je\ klesaj}\text{ící};\ \boldsymbol{pro}\ \forall\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}\text{: } \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} < \mathbf{0}\right]$$

7. Vyšetřete, zda je omezená posloupnost $\left(\frac{n+3}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

$$\left[\boldsymbol{posloupnost\ je\ omezen}\text{á},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} \leq \mathbf{2}\right]$$

## Použité zdroje a literatura:


BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.