Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

POVRCH A OBJEM KOULE A JEJÍCH ČÁSTÍ

Autor	Hana Machalová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	15. 2. 2014
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí vypočítat povrchy a objemy koule a jejích částí, využívá přitom goniometrické funkce. Dovede vyjádřit ze vzorců pro objemy a povrchy jednotlivé neznámé. Dále dokáže aplikovat výpočty objemů a povrchů těles v praktických úlohách.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1. Ze dvou koulí o poloměrech $r_1 = 4\ cm$ a $r_2 = 5\ cm$ je ulita nová koule. Určete její povrch. Příklad řešte nejprve obecně.

Řešení:

Abychom mohli vypočítat povrch nové koule (podle vzorce $S = 4\pi r^2$), musíme zjistit její poloměr.

Objem nové koule je roven součtu objemů původních koulí (pro původní koule použijeme indexy 1, 2 a pro novou kouli pak index 3):

$$V_3 = V_1 + V_2$$
$$\frac{4}{3}\pi r_3^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3$$
$$\frac{4}{3}\pi r_3^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 + r_2^3\right)$$
$$r_3^3 = r_1^3 + r_2^3$$
$$r_3 = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}$$

Nyní poloměr nové koule dosadíme do vzorce pro obsah koule.

$$S_2 = 4\pi r_3^2$$
$$S_2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}\right)^2$$

Vyřešili jsme tedy příklad obecně a posledním krokem bude dosadit do řešení za $r_1 = 4\ cm$ a $r_2 = 5\ cm$:

$$S_2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}\right)^2 = S_2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{4^3 + 5^3}\right)^2 = 4\pi\sqrt[3]{189^2}$$
$$S_2 \cong 413{,}86\,cm^2$$

Povrch nové koule ulité z původních dvou koulí je 413,86 cm^2.

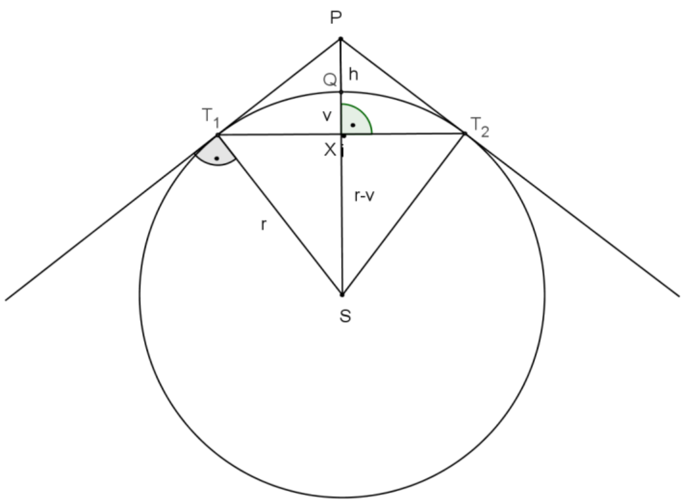
2. Jakou část zemského povrchu je vidět z výšky 400 km nad Zemí?

Řešení:

Viditelná část Země tvoří kulový vrchlík (obr. 1).

Abychom mohli vypočítat jeho povrch ($S = 2\pi r v$), musíme určit jeho výšku. Tu určíme díky podobnosti trojúhelníků $\Delta SXT_1 \approx \Delta ST_1P$ (uu).

$$\frac{|ST_1|}{|SP|} = \frac{|SX|}{|ST_1|}$$



Obr. 1

Z obrázku vidíme, že platí:

$$|SP| = r + h$$
$$|SX| = r - v$$
$$|ST_1| = r$$

Dosadíme do výše uvedené rovnice a vyjádříme v:

$$\frac{r}{r+h} = \frac{r-v}{r} \quad / \cdot r$$
$$\frac{r^2}{r+h} = r - v$$
$$v = r - \frac{r^2}{r+h}$$
$$v = \frac{r^2 + rh - r^2}{r+h}$$
$$v = \frac{rh}{r+h}$$

Nyní můžeme v dosadit do rovnice pro povrch:

$$S = 2\pi r v = 2\pi r \frac{rh}{r+h} = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$
$$S = \frac{2\pi \cdot 6378^2 \cdot 400}{6378 + 400}$$
$$(S \cong 15083680{,}51\, km^2)$$

Nyní víme, jaká plocha Země je vidět z výšky 400 metrů nad Zemí. Abychom určili, jaká část Země to je, musíme ještě určit celkovou plochu Země (označíme ji S_Z):

$$S_Z = 4\pi r^2$$
$$(S_Z \cong 4\pi \cdot 6378^2\, km^2 \cong 511185932{,}5\, km^2)$$

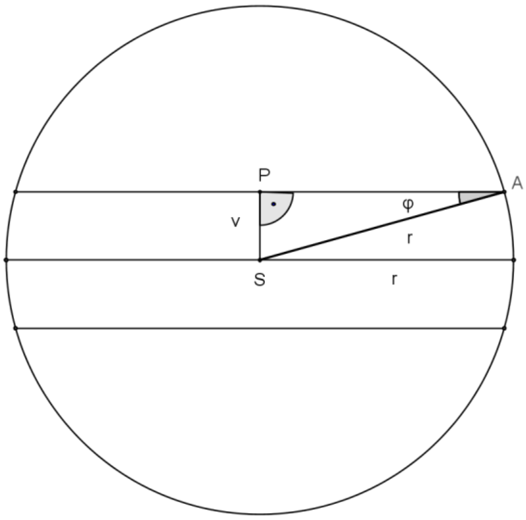
Kolik procent (p) zemského povrchu je vidět vypočítáme pomocí přímé úměry:

$$p = \frac{S}{S_Z} \cdot 100\% = \frac{\frac{2\pi r^2 h}{r+h}}{4\pi r^2} = \frac{h}{2(r+h)} \cdot 100\%$$
$$p \cong 2{,}95\%$$

Z výšky 400 km nad Zemí vidíme přibližně 2,95 % zemského povrchu.

3. Kolik procent zemského povrchu leží v oblasti tropického pásma (obratník $\varphi = 23°27'$).

Řešení:



Obr. 2

Označíme si povrch země ležící v tropickém pásmu jako S_T a ten se vypočítá jako dvojnásobek povrchu kulové vrstvy S_1.

$$S_T = 2S_1$$
$$S_1 = 2\pi r v$$

Bude třeba ještě zjistit výšku kulové vrstvy v, a to z pravoúhlého trojúhelníku SAP (obr. 2):

$$\sin\varphi = \frac{v}{r}$$
$$v = r \cdot \sin\varphi$$

Nyní můžeme vyjádřit S_T :

$$S_T = 2S_1 = 2 \cdot 2\pi r v = 4\pi r \cdot r \cdot \sin\varphi = 4\pi r^2 \cdot \sin\varphi$$

$$S_Z = 4\pi r^2$$

$$p = \frac{S_T}{S_Z} \cdot 100\% = \frac{4\pi r^2 \cdot \sin\varphi}{4\pi r^2} 100\% = \sin\varphi \cdot 100\%$$

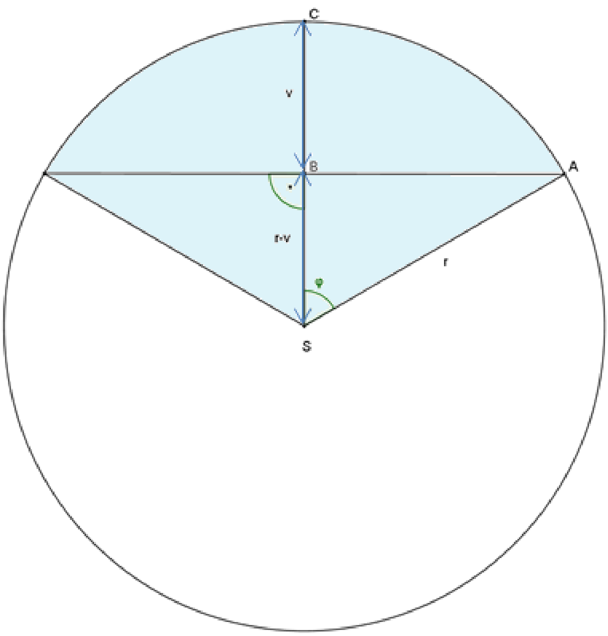
$$p = \sin 23°27' \cdot 100\,\%$$

$$p \cong 39{,}79\ \%$$

V oblasti tropického pásma leží přibližně 39,79 % zemského povrchu.

4. Objem kulové výseče je $V = 72\pi\ cm^3$. Středový úhel jejího osového řezu je $2\varphi = 120°$. Jak velký je poloměr r koule, z níž tato výseč vznikla?

<u>Řešení:</u>



Obr. 3

$$V = 72\pi\ cm^3$$

$$2\varphi = 120°$$

$$\underline{r = ?\ cm}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$

Je třeba nejprve určit v, kterou vyjádříme z pravoúhlého trojúhelníku SAB (obr. 3):

$$\cos\varphi^\circ = \frac{r-v}{r}$$
$$r\cos\varphi = r - v$$
$$v = r - r\cos\varphi$$
$$v = r(1-\cos\varphi)$$
$$v = r(1-\cos 60^\circ)$$
$$v = \frac{r}{2}$$

Nyní dosadíme za v do vzorce pro objem, za V dosadíme hodnotu ze zadání a vypočítáme r:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$
$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \frac{r}{2}$$
$$72\pi = \frac{\pi r^3}{3}$$
$$216 = r^3$$
$$r = \sqrt[3]{216}$$
$$r = 6\ cm$$

Poloměr koule, z níž výseč vznikla, je 6 cm.

Příklady k procvičování:

1. Dutá kovová koule má vnější průměr $d = 4\ dm$. Určete její tloušťku, má-li hmotnost 25 kg a hustota kovu je $\rho = 8{,}45\ g/cm^3$.

$[x \cong 6{,}07\ mm]$

2. Objem kulové úseče je $V = 45\pi\ cm^3$. Její výška je 3 cm. Určete povrch úseče.

$[S = 36\pi\ cm^2]$

3. Kolik procent zemského povrchu leží
   a. v oblasti mírného pásma (obratník $\varphi = 23°27'$, polární kruh $\varphi = 66°33'$),
   b. v oblasti polárního pásma?

[a) 51,9%, b) 8,3%]

4. Objem kulové výseče je roven $\frac{1}{4}$ objemu koule, z níž výseč vznikla. Určete povrch výseče, má-li poloměr koule velikost r.

$[S = \frac{1}{2}\pi r^2\left(2 + \sqrt{3}\right)]$

5. Určete obsah kulového pásu a objem kulové vrstvy, jsou-li dány poloměry podstav $\rho_1 = 11{,}2\ cm, \rho_1 = 3{,}2\ cm$ a poloměr koule$r = 13\ cm$. Střed koule přitom neleží uvnitř vrstvy.

$[S \cong 490{,}1\ cm^2, V \cong 1391{,}9\ cm^3]$

6. Nádoba tvaru polokoule je naplněna vodou. Pokud ji nakloníme o 30°, vyteče z ní 5,5 litrů vody. Kolik litrů vody v nádobě zůstane?

[2,5 $litru$]

7. Kouli je opsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. V jakém poměru jsou povrchy a objemy těchto těles?

$[S_1 : S_2 : S_3 = V_1 : V_2 : V_3 = 4 : 6 : 9]$

Použité zdroje a literatura:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.
BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.
KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.