Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

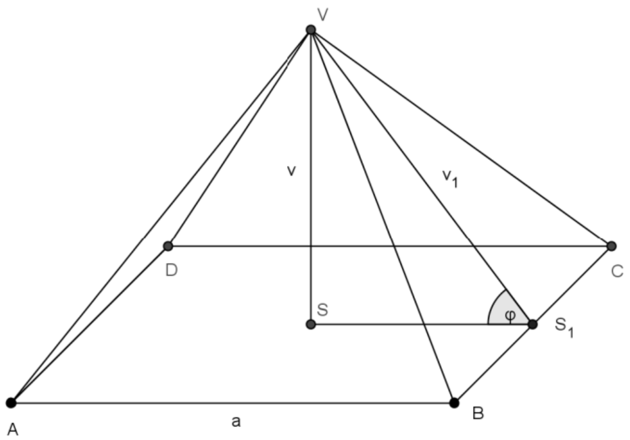
IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

POVRCH A OBJEM HRANOLU A JEHLANU

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	8. 2. 2014
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí vypočítat povrchy a objemy hranolů a jehlanů, využívá přitom metrické vlastnosti (výpočty odchylek přímek a rovin a vzdálenosti bodů od přímek a rovin). Dále dokáže aplikovat výpočty objemů a povrchů těles v praktických úlohách.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1. Cheopsova pyramida má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně 230 metrů. Úhel sklonu stěn φ (odchylka roviny boční stěny a podstavy) je roven 51°50´.
   a. Kolik kamenných kvádrů o objemu 1,1 m^3 bylo potřeba na její stavbu?
   b. Kolik kamenných desek o ploše 0,5 m^2 by bylo potřeba na její vnější obložení?
   c. Kolik tun váží kámen (žula), ze kterého je vyrobena (hustota žuly je 2900kg/m^3)?
   d. Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem České republiky, je-li délka hranice 2303 km?



Obr. 1

Řešení:

a. Abychom mohli určit počet kamenných kvádrů o objemu 1,1 m^3 potřebných na stavbu této pyramidy, musíme určit její objem. Pro výpočet objemu budeme nejprve muset vypočítat výšku pyramidy.

   Z pravoúhlého trojúhelníku VSS_1 (obr. 1) získáme rovnici:

$$tg\varphi = \frac{v}{\frac{a}{2}}$$

$$v = \frac{a \cdot tg\varphi}{2} = \frac{230 \cdot tg\ 51°50´}{2}$$

$$(v \cong 144{,}6\ m)$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot \frac{230 \cdot tg\ 51°50´}{2}$$

$$V \cong 2549336\ m^3$$

   Počet kvádrů vypočítáme tak, že objem celé pyramidy V vydělíme objemem jednoho kvádru V_1:

$$n = \frac{V}{V_1}$$

$$\underline{\underline{n = 2317579}}$$

Na stavbu Cheopsovy pyramidy bylo třeba 2317579 kamenných kvádrů.

b. Pro zjištění, kolik kamenných desek o ploše 0,5 m^2 by bylo potřeba na její vnější obložení, musíme vypočítat povrch bočních stěn pyramidy.

Nejprve muset vypočítat výšku trojúhelníku tvořícího stěny jehlanu. Z pravoúhlého trojúhelníku VSS_1 (viz obr. 1) získáme rovnici:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$v_1 \cong 184{,}7\ m$$

Povrch pyramidy, který by se pokrýval obležením, je roven čtyřnásobku povrchu stěny:

$$S_S = 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} = 2 \cdot a \cdot v_1$$

$$S_S \cong 84977{,}9\ m^2$$

Počet kamenných desek zjistíme, když vydělíme povrch celé pyramidy povrchem jedné kamenné desky:

$$n_d = \frac{S_S}{S_1}$$

$$\underline{\underline{n_d = 169956}}$$

Na obložení Cheopsovy pyramidy bylo třeba 169956 kamenných desek.

c. Hmotnost kamene, z něhož je vyrobena Cheopsova pyramida, zjistíme z rovnice:

$$m = V \cdot \rho$$

$$\underline{\underline{m \cong 7393074091\ kg}}$$

Kámen, ze kterého je vyrobena Cheopsova pyramida, váží přibližně 7393074 tun.

d. Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem České republiky, je-li délka hranice 2303 km?

Tato otázka lze přeformulovat: Jak vysoký by byl kvádr o objemu Cheopsovy pyramidy o rozměrech podstavy 2303000 m a 0,6 m?

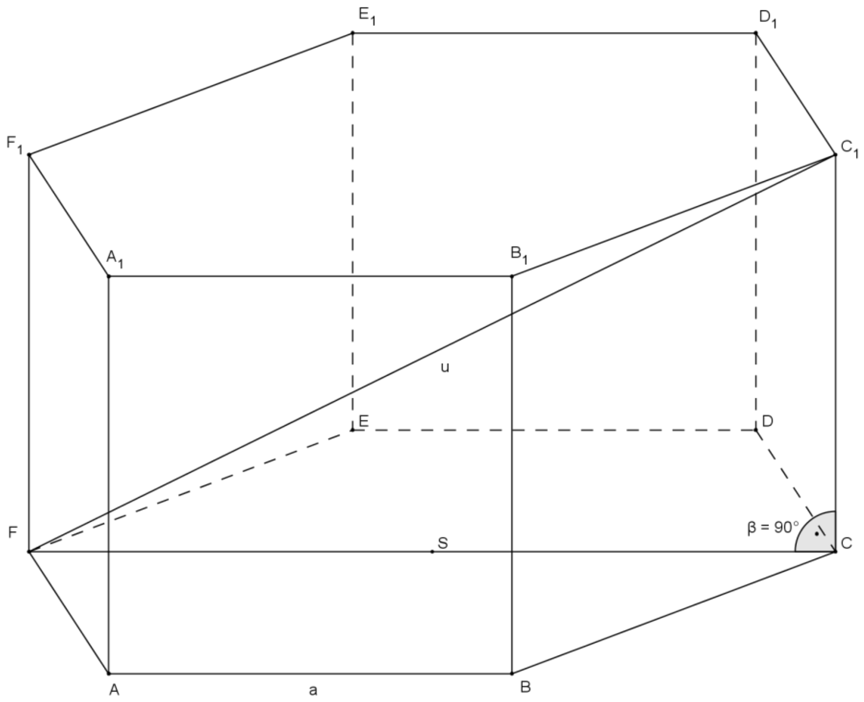
$$V_K = a \cdot b \cdot c$$

$$c = \frac{V_K}{a \cdot b} = \frac{2549336}{2303000 \cdot 0{,}6}$$

$$\underline{\underline{c \cong 1{,}84\ m}}$$

Zeď o šířce 60 cm vystavěná ze zdiva Cheopsovy pyramidy kolem České republiky by dosahovala výšky přibližně 1,84 m.

2. Urči povrch a objem kolmého pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ se stranou $a = |AB| = 6cm$ a tělesovou úhlopříčkou $u = |FC_1| = 15cm$



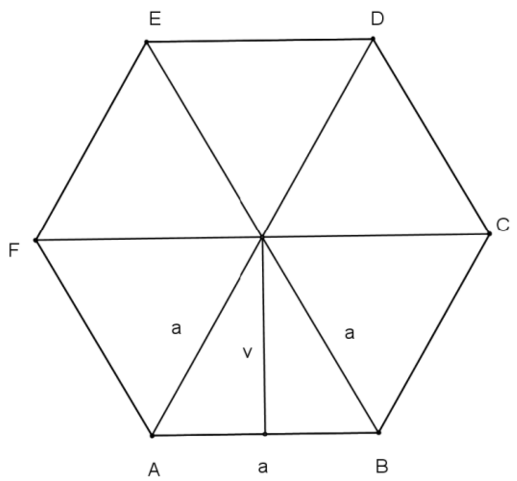
Obr. 2

<u>Řešení:</u>

Podstava se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků (obr. 3) o obsahu:

$$S_1 = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$



Obr. 3

Obsah podstavy se se tedy vypočítá:

$$S_p = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 6 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot a}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$$

$$S_p = \frac{3\sqrt{3} \cdot 6^2}{2} = 54\sqrt{3}$$

Plášť se skládá se šesti stejných obdélníků. Zatím neznáme výšku hranolu, ale vypočítáme ji pravoúhlého trojúhelníku FCC_1 (viz obr. 2).

$$v = \sqrt{u^2 - (2a)^2} = \sqrt{u^2 - 4a^2}$$

$$S_{pl} = 6av = 6a\sqrt{u^2 - 4a^2}$$

$$S_{pl} = 6 \cdot 6 \cdot \sqrt{15^2 - 4 \cdot 36} = 324$$

Povrch pravidelného šestibokého jehlanu tedy vypočítáme:

$$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2} + 6a\sqrt{u^2 - 4a^2} = 108\sqrt{3} + 36\sqrt{15^2 - 12^2} = 108\sqrt{3} + 324$$

$$\underline{\underline{S \cong 511{,}06\ cm^2}}$$

Objem hranolu vypočítáme:

$$V = S_p \cdot v = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}\sqrt{u^2 - 4a^2} = 54\sqrt{3} \cdot 9 = 486\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{V \cong 841{,}78\ cm^3}}$$

3. Kolikrát se zvětší objem a povrch krychle, pokud se její hrana zvětší třikrát?

<u>Řešení:</u>

Objem původní krychle označíme V_0, objem zvětšené krychle pak V_1:

$$V_0 = a^3$$

$$V_1 = (3a)^3 = 27a^3$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{27a^3}{a^3} = 27$$

Objem se zvětší 27krát.

Povrch původní krychle označíme S_0, Povrch zvětšené krychle pak S_1:

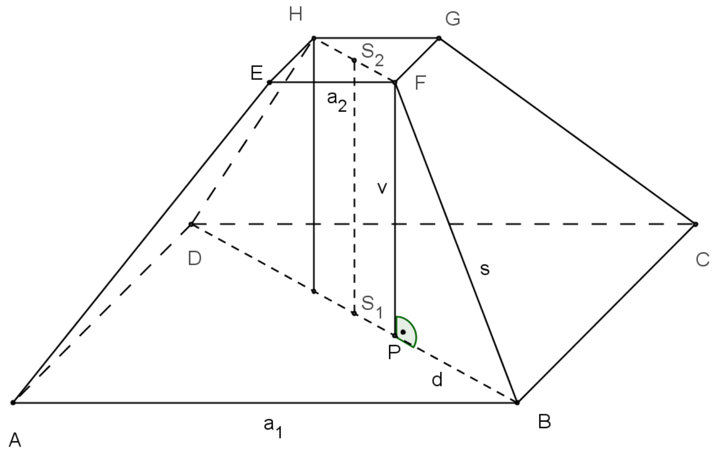
$$S_0 = 6a^2$$

$$S_1 = 6(3a)^2 = 6 \cdot 9a^2 = 54a^2$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{54a^2}{6a^2} = 9$$

Povrch se zvětší 9krát.

4. Vypočítejte objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, je-li délka hrany dolní podstavy a_1 = 6 cm, délka hrany horní podstavy a_2 = 2 cm a délka boční hrany komolého jehlanu je s = 4 cm.



Obr. 4

Označíme-li S_1 - obsah dolní podstavy a S_2 - obsah horní podstavy, objem komolého kužele se vypočítá podle vzorce:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \cdot v$$

$$S_1 = a_1^2 = 6^2 = 36$$

$$S_2 = a_2^2 = 2^2 = 4$$

Výšku komolého jehlanu zjistíme z rovnoramenného lichoběžníku DBFH, jehož základny mají délku úhlopříček obou podstav.

$$u_1 = \sqrt{2a_1^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2a_2^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$$

V trojúhelníku PBF známe délku s = 3cm a d je polovina rozdílu úhlopříček podstav:

$$d = \frac{u_1 - u_2}{2} = \frac{(6-2)\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$s = 3\,cm$$

$$v = \sqrt{s^2 - d^2} = \sqrt{9-8} = 1$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \cdot v = \frac{1}{3}\left(36 + 4 + \sqrt{36 \cdot 4}\right) \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \left(40 + \sqrt{144}\right) = \frac{52}{3} = 17,\bar{3}$$

$$V \cong 17,3\,cm^3$$

Objem komolého jehlanu je přibližně 17,3 cm^3.

Příklady k procvičování:

1. Pravidelný šestiboký jehlan má podstavnou hranu délky $a = \sqrt{3}$ cm a pro odchylku α podstavné a boční hrany platí, že a $tg\alpha = 2$. Určete objem jehlanu.

   [V = 2,25 cm^3]

2. Vypočítejte povrch krychle, je-li délka její tělesové úhlopříčky 21 cm.

   [S = 882 cm^2]

3. Kvádr má objem 7,5 dm^3. Jeho rozměry jsou v poměru 3:4:5. Vypočítejte jeho povrch a tělesovou úhlopříčku.

   [S = 2350 cm^2, u = 35,4 cm]

4. Pravidelný šestiboký hranol má tělesové úhlopříčky u_1 = 15 cm, u_2 = 17 cm. Vypočítejte délku jeho podstavné hrany, výšku, povrch a objem.

   [a = 8 cm, v = 5,75 cm, S = 608,5 cm^2, V = 955,2 cm^3]

5. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 60°. Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.

   $[V = \frac{76}{3}\sqrt{3}\,cm^3, S = 92\,cm^2]$

6. Je dána krychle A-H o hraně délky a = 3 cm. Určete povrch a objem tělesa A C H F a o jaké těleso se jedná.

   [S = 31,2 cm^2, V = 9 cm, pravidelný čtyřstěn]

Použité zdroje a literatura:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.