Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

# STEREOMETRIE

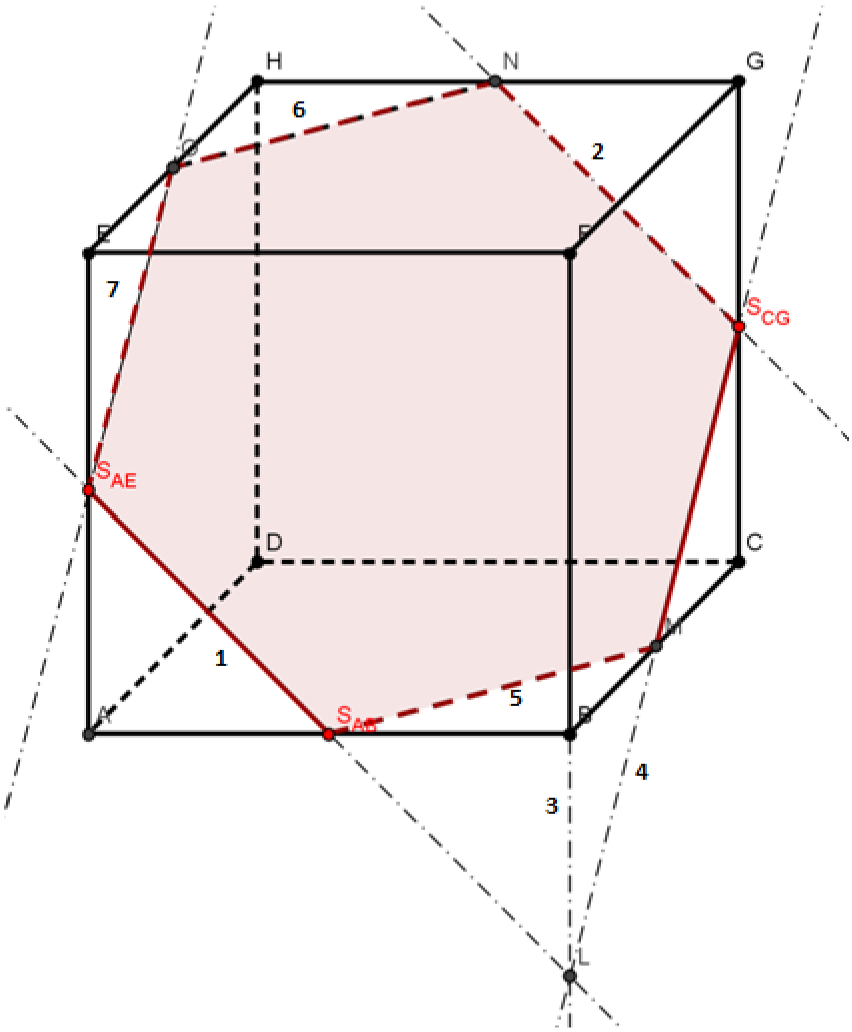
| | |
|---|---|
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 3. 2. 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák umí využít základní stereometrické věty a poznatky ke konstrukci rovinného řezu tělesa, průsečíku přímky s tělesem, průsečnice rovin a průsečíku přímky s rovinou; umí řešit metrické úlohy v prostoru |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Je dána krychle ABCDEFGH s hranou dlouhou 5 cm. Sestrojte řez krychle rovinou $S_{AE}S_{AB}S_{CG}$. Vypočítejte jeho obvod a obsah.**

*Řešení:*

*Sled kroků konstrukce řezu je očíslován v obrázku s řešením. (rovnoběžky 1 a 2; 4 a 7; 5 a 6)*




*Řezem je pravidelný šestiúhelník. Délka jeho hrany je polovina úhlopříčky ve čtverci, který je stěnou krychle. Pro výpočet obsahu ho rozdělíme na šest shodných rovnoramenných trojúhelníků.*

*- délka strany šestiúhelníka* $a = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ cm$

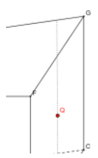
*- obvod šestiúhelníka* $o = 6a = 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15 \cdot \sqrt{2}\ cm$

*- obsah šestiúhelníka* $S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 60° = 3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{4} \cdot \sqrt{3}\ cm^2$

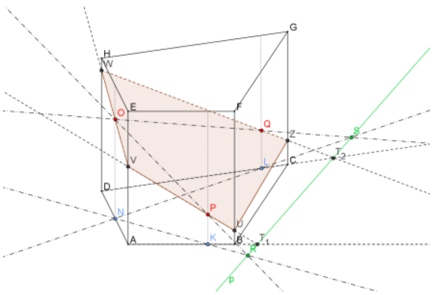
*Poznámka:*
*Pomocí Pythagorovy věty si můžeme spočítat výšku rovnoramenného trojúhelníka a obsah šestiúhelníka počítat podle vztahu* $S = 6 \cdot \frac{1}{2} a v_a$.
*- výška rovnostranného trojúhelníka* $v_a = \frac{5\sqrt{6}}{4}$
*- obsah šestiúhelníka* $S = 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{75}{4} \cdot \sqrt{3}\ cm^2$

---

**2) Je dán kolmý hranol ABCDEFGH. V jeho stěnách jsou umístěny body O, P, Q tak, jak je znázorněno na obrázku. Sestrojte řez hranolu rovinou OPQ.**

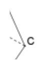


*Řešení:*
*Při konstrukci řezu využijeme osovou afinitu (směr afinity určují boční hrany). V osové afinitě se body O, P, Q roviny řezu zobrazí do roviny podstavy do bodů N, K, L. Nalezneme osu afinity = průsečnici dolní podstavy a roviny řezu (na obrázku zeleně vyznačená přímka* $p = \leftrightarrow RS; R = \leftrightarrow NK \cap \leftrightarrow OP; S = \leftrightarrow NL \cap \leftrightarrow OQ$*).*
*Na ose afinity se protínají průsečnice tří rovin, z nichž každé dvě jsou různoběžné (rovina řezu, podstavná rovina, boční stěna).*
*Na ose afinity najdeme bod* $T_1$*: osa afinity ∩ průsečnice spodní podstavy a přední stěny ABEF.*
*Bodem* $T_1$ *prochází i průsečnice roviny řezu a přední stěny.*
*Na ose afinity najdeme bod* $T_2$*: osa afinity ∩ průsečnice dolní podstavy a zadní stěny DCGH.*
*Bodem* $T_2$ *prochází i průsečnice roviny řezu a zadní stěny.*
*Pak už snadno doplníme celý řez.*




---

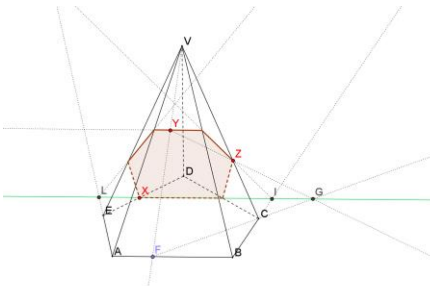
**4) Sestrojte řez jehlanu ABCDEV rovinou XYZ, jestliže bod X je vnitřním bodem hrany DE, Y vnitřním bodem stěny ABV a Z vnitřním bodem hrany CV. (viz obr.)**



*Řešení:*

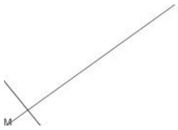
*K sestrojení řezu využijeme středovou kolineaci se středem kolineace ve vrcholu V. Najdeme osu kolineace, což je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Na ose kolineace se protínají odpovídající si přímky.*

*Osa kolineace bude procházet bodem X, protože se jedná o společný bod roviny řezu a podstavné roviny. Je nutné najít další bod osy kolineace, což bude společný bod přímky YZ a přímky FC (ve středové kolineaci se středem V přímce YZ odpovídá přímka FC). Osa kolineace (na obr. zeleně) současně určuje řez v podstavě. Spojením snadno získáme řez ve stěně CDV. Při hledání řezu ve stěně BCV si musíme uvědomit, že hraně řezu ve středové kolineaci odpovídá přímka BC a že se tyto odpovídající si přímky protínají na ose kolineace (na obr. bod I). Spojením bodu řezu, který leží na hraně BV, s bodem Y získáme řez ve stěně ABV. Úsečku řezu ve stěně AEV hledáme podobně jako ve stěně BCV (pomocí bodu L). Spojením bodu řezu na hraně EV s bodem X, doplníme poslední úsečku řezu ve stěně EDV.*



**5) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV ($|AB| = a = 4\ cm, v = 1{,}5a$), bod M je středem hrany BV. Početně i konstrukčně určete odchylku přímek AM a CV.**

*Řešení:*




*Přímky AM a CV jsou mimoběžné, proto jejich odchylku určíme pomocí různoběžek AM a EM (přímka EM je rovnoběžná s přímkou CV).*

*Řešit úlohu početně, znamená vypočítat velikost úhlu $\alpha$ při vrcholu M v obecném trojúhelníku AEM. Budeme řešit kosinovou větou, proto musíme nejdříve vypočítat délky všech stran trojúhelníka AEM.*

*Strana AE je přeponou pravoúhlého trojúhelníka ABE, pro výpočet použijeme Pythagorovu větu.*

$$|AE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

*Strana EM je střední příčkou v trojúhelníku BCV, její délka je polovinou délky boční hrany CV. Proto nejdříve určíme délku boční hrany jehlanu. Budeme řešit v pravoúhlém trojúhelníku CSV, kde S je střed podstavy.*

$$|CV| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{11a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2} = \frac{4\sqrt{11}}{2} = 2\sqrt{11} \Rightarrow |EM| = \sqrt{11}$$

*Úsečka AM je těžnicí v rovnoramenném trojúhelníku ABV. Pro výpočet její délky použijeme v trojúhelníku ABV kosinovou větu. Nejdříve však v pravoúhlém trojúhelníku $BS_{AB}V$ určíme kosinus úhlu $\beta$ ($\sphericalangle S_{AB}BV$).*

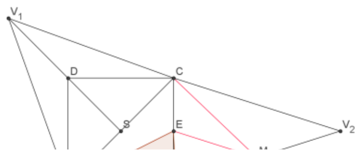
$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{11}}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$|AM| = \sqrt{|AB|^2 + |BM|^2 - 2|AB||BM|\cos\beta} = \frac{a\sqrt{19}}{4} = \sqrt{19}$$

*Nyní přistoupíme k určení velikosti úhlu $\alpha$.*

$$\cos\alpha = \frac{|AM|^2 + |EM|^2 - |AE|^2}{2|AM||EM|} = \frac{19 + 11 - 20}{2\sqrt{19}\sqrt{11}} \Rightarrow \alpha = 69°47'$$

*Grafické řešení:*




---

**6) Pravidelný šestiboký hranol $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ má podstavné i boční hrany stejné délky 3 cm. Početně i graficky určete vzdálenost rovin $A_1E_1F_2$ a $B_2D_2C_1$.**

*Řešení:*

*Situace je znázorněna na obrázku, kde vzdálenost rovin je vyznačena úsečkou AC.*

*Řešit úlohu graficky znamená narýsovat ve skutečné velikosti obdélník $F_1C_1C_2F_2$, vyznačit body A a B ($|F_1A| = |C_2B| = \frac{1}{4}|F_1C_1|$), bodem A vést kolmici na $C_1B$, její patou je bod C.*

*Grafické řešení pomůže úlohu vyřešit početně. Úsečka AC je výškou rovnoběžníka $AC_1BF_2$, jehož obsah můžeme vyjádřit dvojím způsobem.*

$|AC_1| \cdot |C_1C_2| = |C_1B| \cdot |AC|$

*Pomocí Pythagorovy věty vypočteme velikost úsečky $C_1B$: $|C_1B| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.*

*Nyní je délka úsečky AC v uvedené rovnici jedinou neznámou.*

$|AC| = \dfrac{9\sqrt{5}}{5} \doteq 4{,}02\ cm$

---

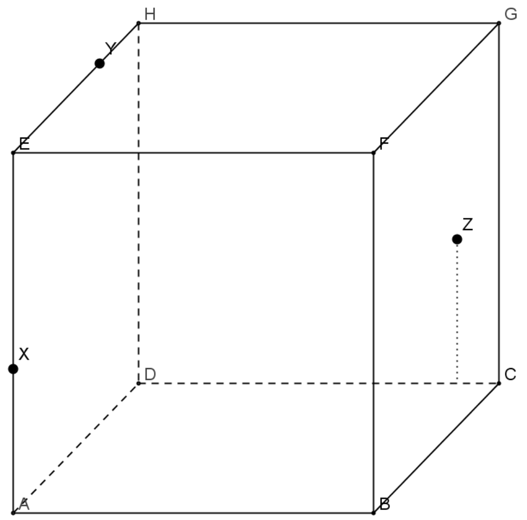
Příklady k procvičování:

1) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou XYZ:

$\mathrm{X} = \mathrm{S}_{\mathrm{DH}}$, $\mathrm{Y} \in \mapsto \mathrm{GC} \wedge |GY| = \dfrac{3}{2}|CG|$, $\mathrm{Z} \in \mathrm{BF} \wedge |\mathrm{ZF}| = \dfrac{1}{3}|BF|$.

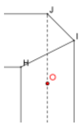
(správné řešení viz obr. 1)

2) Setrojte řez krychle rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$, je-li bod X vnitřním bodem hrany AE, Y vnitřním bodem hrany EH a Z je vnitřním bodem stěny DCGH. Možná poloha bodů je vyznačena na obrázku.




(správné řešení viz obr. 2)

3) Pomocí osové afinity sestrojte řez šestibokého hranolu rovinou MNO.

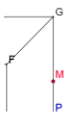



(správné řešení viz obr. 3)

4) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Sestrojte řez rovinou EFG. Bod E je středem hrany AV, bod F je vnitřním bodem hrany BV, $|BF|:|FV| = 1:5$, bod G je vnitřním bodem hrany CV, $|CQ|:|QV| = 1:3$.
(správné řešení viz obr. 4)

5) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV a na jeho hranách body P, Q. Bod P je bodem hrany DV tak, že $|DP|:|PV| = 3:1$. Bod Q je bodem polopřímky AB a přitom $|AQ| = \frac{5}{4}|AB|$.
Sestrojte průsečík přímky PQ s rovinou BCV.
(správné řešení viz obr. 5, použijte rovinu DQV)

6) Sestrojte průsečnici rovin PQR a KLM v krychli ABCDEFGH.




( správné řešení viz obr. 6)

7) Je dána krychle ABCDEFGH. Sestrojte průsečnici rovin $BCS_{GH}$ a AEK, jestliže bod K je středem stěny BCGF.
(správné řešení: přímka $S_{EG}S_{BC}$)

8) V kvádru ABCDEFGH ($|AB| = 6\ cm, |BC| = 3\ cm, |AE| = 8\ cm$) je bod M středem hrany AE, bod N středem hrany BF. Vypočtěte odchylku přímek BM a NG.
(správné řešení: přibližně 63°40´)

9) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV ($|AB| = a = 4\ cm, v = 1{,}5a$). Určete početně odchylku rovin sousedních bočních stěn.
(správné řešení: přibližně 84°16´)

10) V pravidelném šestibokém jehlanu ABCDEFV ($|AB| = a = 3\ cm, |VS| = v = 4\ cm,$ S je střed podstavy) určete odchylku přímky BM od roviny ABC, jestliže bod M je střed hrany AV.
(správné řešení: přibližně 37°35´)

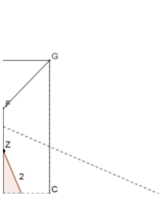
11) Je dána krychle ABCDEFGH s hranami dlouhými 4 cm. Bod M je střed hrany EF. Vypočtěte vzdálenost:

a) bodu A od přímky BH,

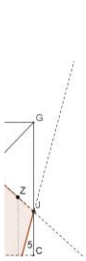
b) bodu M od roviny ABG.

(správné řešení: a) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm; b) $2\sqrt{2}$ cm)

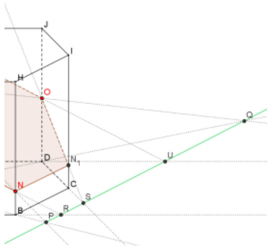
<u>Správná řešení:</u>



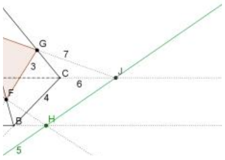
obr. 1



obr. 2

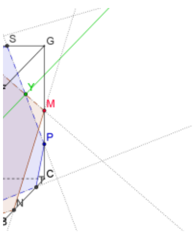



obr. 3



obr. 4

obr. 5




obr. 6

## Použité zdroje a literatura:


POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-389-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.