Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

UŽITÍ TRIGONOMETRIE V PRAXI

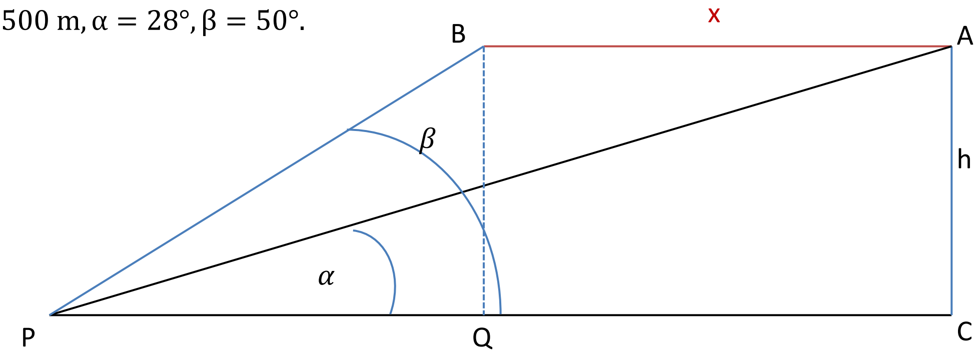
Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	20. února 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem sinová a kosinová věta a umí je aplikovat při řešení úloh z praxe
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Příklad 1

Letadlo letí ve výšce 2500 m vzhledem k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět pod výškovým úhlem 28°, při druhém měření pod výškovým úhlem 50°. Určete vzdálenost, kterou uletělo mezi oběma měřeními.

Řešení

$h = 2500\ \mathrm{m}, \alpha = 28°, \beta = 50°.$



Nejdříve si z trojúhelníku ΔAPC určíme pomocí trigonometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku vzdálenost $|PC|$. Zde platí:

$$tg\ \alpha = \frac{h}{|PC|} \ \rightarrow |PC| = \frac{h}{tg\ \alpha} = \frac{2500}{tg\ 28°}\ \mathrm{m} = 4702\ \mathrm{m}.$$

Nyní obdobně v trojúhelníku ΔBPC určíme vzdálenost $|PQ|$. Zde platí:

$$tg\ \beta = \frac{h}{|PQ|} \ \rightarrow |PQ| = \frac{h}{tg\ \beta} = \frac{2500}{tg\ 50°}\ \mathrm{m} = 2098\ \mathrm{m}.$$

Nakonec určíme vzdálenost mezi body A, B.

$$x = |PC| - |PQ| = \cdots = \mathbf{2604\ m}.$$

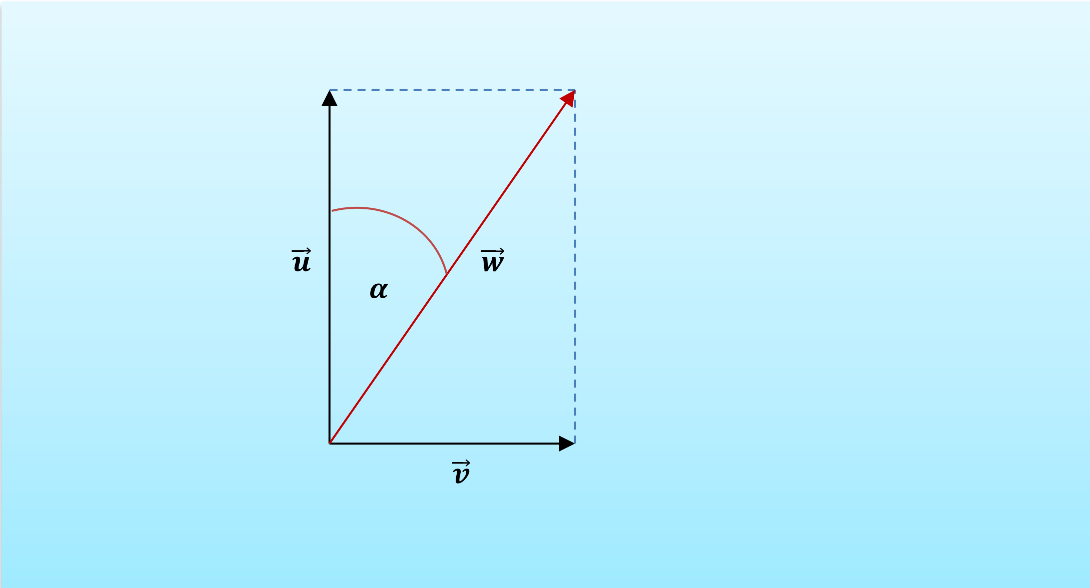
Letadlo mezi dvěma měřeními uletělo vzdálenost 2604 m.

Příklad 2

Řeka široká 900 m má přímý tok. Rychlost proudu v řece je $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Převážející parník pluje kolmo na směr proudu rychlostí $u = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaký úhel svírá dráha výsledného pohybu se směrem kolmým na proud řeky? Jak velkou rychlostí parník pluje? Jakou celkovou dráhu mezi břehy urazí?

Řešení

$v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}};\ u = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}};\ s = 900\ \mathrm{m}$



Nejdříve určíme úhel α**,** který svírá výsledná rychlost se směrem kolmým na proud řeky. Využijeme vlastností pravoúhlého trojúhelníku a tedy

$$tg\ \alpha = \frac{v}{u} = \frac{2}{4} = 0{,}5\ \rightarrow\ \boldsymbol{\alpha \doteq 26°34'}.$$

Nyní určíme velikost výsledné rychlosti parníku a to použitím Pythagorovy věty. Proto

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{4^2 + 2^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq \mathbf{4{,}47\ m \cdot s^{-1}}.$$

Nakonec určíme skutečně uraženou vzdálenost. Kdyby se parník pohyboval po klidné vodě, ujel by vzdálenost 900 m za dobu

$$t = \frac{s}{u} = \frac{900}{4}\ \mathrm{s} = 225\ \mathrm{s}.$$

V řece urazí za tuto dobu vzdálenost

$$d = w \cdot t = 4{,}47 \cdot 225\ \mathrm{m} = \mathbf{1006\ m}.$$

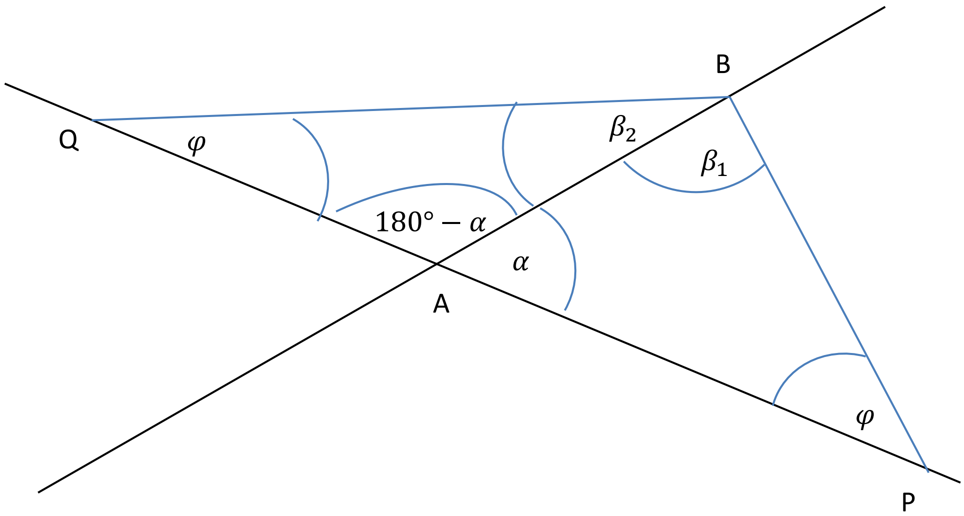
Parník pluje rychlostí 4,47 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, výsledný pohyb se odchyluje o 26°34´od kolmého směru a při své plavbě urazí vzdálenost 1006 m.

Příklad 3

Dvě přímé cesty se křižují v úhlu $\alpha = 53°30'$. Na jedné z nich stojí dva sloupy, jeden na křižovatce, druhý ve vzdálenosti 500 m od ní. Jak daleko musíme jít od křižovatky po druhé cestě, aby byly oba sloupy vidět v zorném úhlu 15°?

Řešení

$\alpha = 53°30'; d = 500\ \mathrm{m};\ \varphi = 15°; \mathrm{s} = ?$



Pozor, tato úloha má dvě řešení. Od křižovatky můžeme jít buď vpravo, nebo vlevo. Proto:

a) Vpravo
   Určíme nejdříve úhel $\beta_1 = 180° - (\alpha + \varphi) = 111°30'$. Nyní už počítáme pomocí sinové věty ve tvaru

$$\frac{d}{\sin\varphi} = \frac{|AP|}{\sin\beta_1} \rightarrow |AP| = \frac{d \cdot \sin\beta_1}{\sin\varphi} = \frac{500 \cdot \sin 111°30'}{\sin 15°}\ \mathrm{m} \doteq \mathbf{1797\ m}.$$

b) Vlevo
   Obdobně jako v případě a) určíme velikost úhlu $\beta_2 = 180° - (180° - \alpha + \varphi) = 38°30'$. Dále opět využitím sinové věty dopočítáme vzdálenost. Tedy

$$\frac{d}{\sin\varphi} = \frac{|AQ|}{\sin\beta_2} \rightarrow |AQ| = \frac{d \cdot \sin\beta_2}{\sin\varphi} = \frac{500 \cdot \sin 38°30'}{\sin 15°}\ \mathrm{m} \doteq \mathbf{1203\ m}.$$

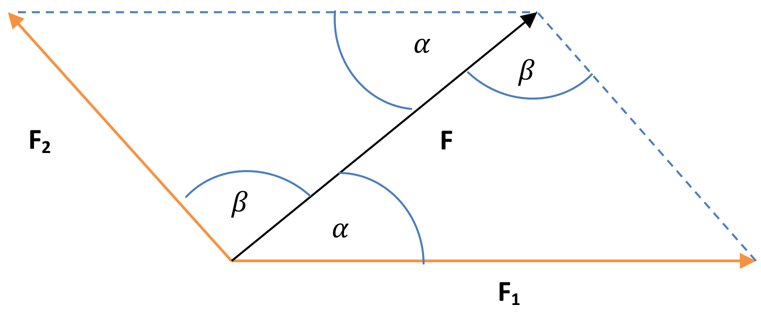
Musíme jít 1797 m vpravo od křižovatky, nebo 1203 m vlevo od křižovatky.

Příklad 4

Sílu o velikosti $F = 465$ N rozložte na dvě složky tak, aby s ní svíraly úhly o velikostech $\alpha = 69°30'$ a $\beta = 74°10'$. Vypočítejte velikosti složek.

Řešení

$F = 465$ N; $\alpha = 69°30'$; $\beta = 74°10'$.



Rozložit sílu na dvě složky je opačná operace ke skládání sil. Využijeme však poznatky o skládání sil (zejména doplnění na rovnoběžník) k výpočtu složek $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$. Také určíme třetí úhel v naznačených trojúhelnících,

$$\varepsilon = 180° - (\alpha + \beta) = 36°20'.$$

Dále použijeme sinovou větu a to:

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F}{\sin\varepsilon} \to F_1 = \frac{F \cdot \sin\beta}{\sin\varepsilon} = \frac{465 \cdot \sin 74°10'}{\sin 36°20'}\,\mathrm{N} \doteq \mathbf{755\ N}$$

a

$$\frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\varepsilon} \to F_2 = \frac{F \cdot \sin\alpha}{\sin\varepsilon} = \frac{465 \cdot \sin 69°30'}{\sin 36°20'}\,\mathrm{N} \doteq \mathbf{735\ N}.$$

Velikosti složek jsou 755 N a 735 N.

Příklad 5

Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $\varphi = 156°30'$. První vlak se pohybuje rychlostí o velikosti $v_1 = 13\ \mathrm{m} \cdot s^{-1}$, druhý vlak se pohybuje rychlostí o velikosti $v_2 = 14{,}5\ \mathrm{m} \cdot s^{-1}$. Jak daleko od sebe budou za 5,5 minuty?

Řešení

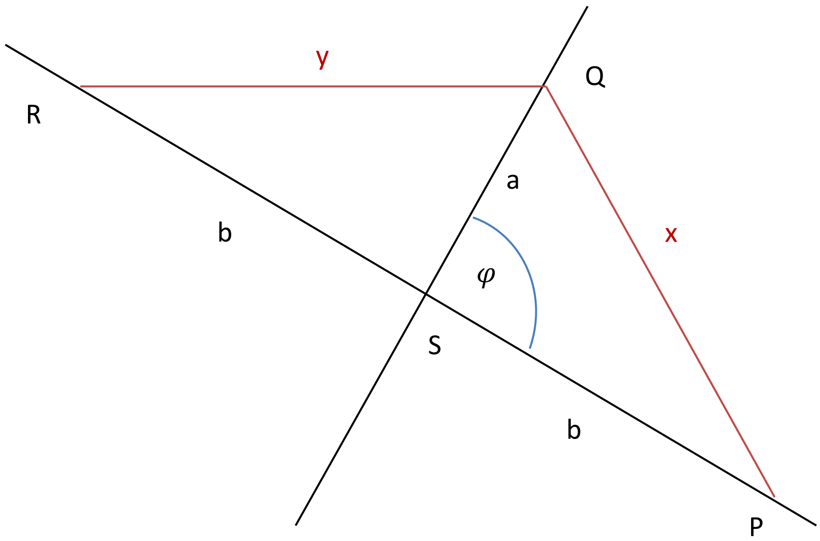
$\varphi = 156°30'$; $v_1 = 13\ \mathrm{m} \cdot s^{-1}$; $v_2 = 14{,}5\ \mathrm{m} \cdot s^{-1}$; $t = 5{,}5\ \mathrm{min} = 330\ \mathrm{s}$

Nejdříve určíme, do jaké vzdálenosti od stanice oba vlaky za stanovený čas dojedou. Takže

$$a = v_1 \cdot t = 13 \cdot 330\ \mathrm{m} = 4290\ \mathrm{m},$$

$$b = v_2 \cdot t = 14{,}5 \cdot 330\ \mathrm{m} = 4785\ \mathrm{m}.$$

Nyní obrázek



Pozor, i tato úloha má dvě řešení. Druhý vlak (podle našeho obrázku) se může pohybovat vpravo, nebo vlevo!

Při řešení této úlohy použijeme kosinovou větu.

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi} = \sqrt{4290^2 + 4785^2 - 2 \cdot 4290 \cdot 4785 \cdot \cos 156°30'}\ \mathrm{m} \doteq 8885\ \mathrm{m}.$$

$$y^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180° - \varphi)$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180° - \varphi)} =$$

$$\sqrt{4290^2 + 4785^2 - 2 \cdot 4290 \cdot 4785 \cdot \cos 23°30'}\ \mathrm{m} \doteq 1911\ \mathrm{m}.$$

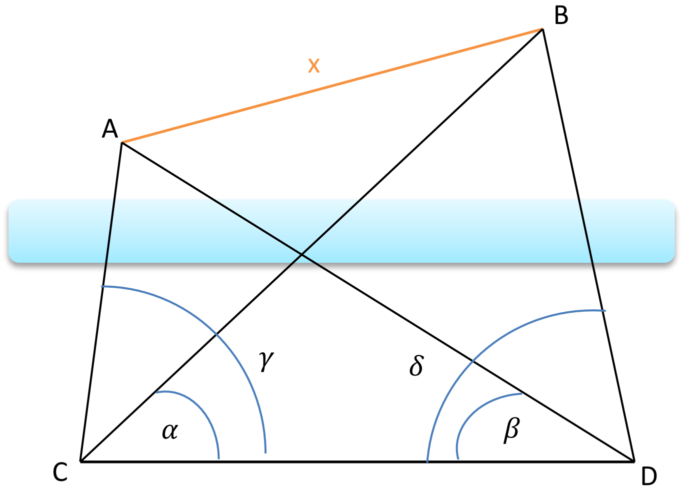
Vlaky budou od sebe vzdálené 8885 m, nebo 1911 m.

Úlohy k procvičení

1. Dvě síly o velikostech $F_1 = 10\ \mathrm{N}, F_2 = 5\ \mathrm{N}$ působí v jednom bodě tělesa a svírají spolu úhel o velikosti $\alpha = 52°30'$. Jak velká musí být třetí síla působící v tomto bodě, aby zrušila účinek dvou původních sil? Jaký úhel svírá třetí síla se silou $\boldsymbol{F_2}$.

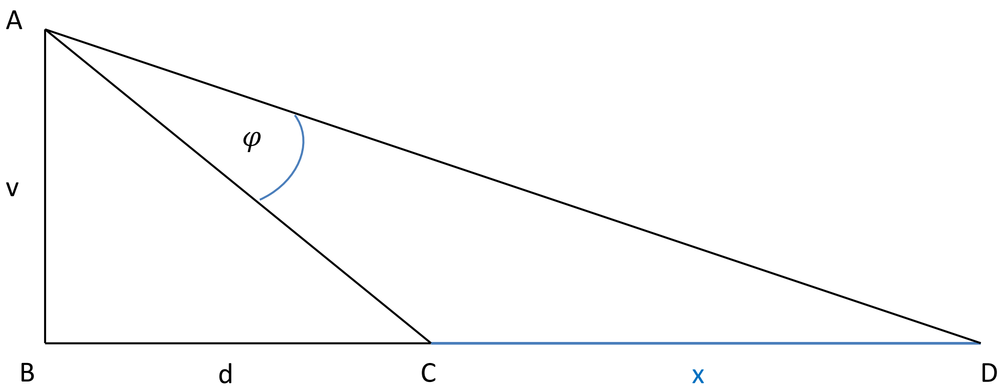
   $[\boldsymbol{F = 13{,}63\ \mathrm{N};\ \varphi = 144°25'}]$

2. Určete vzdálenost dvou bodů A, B, které jsou na druhém břehu řeky, jestliže vzdálenost bodů C, D je 2000 m a velikosti úhlů jsou $\alpha = 52°40', \beta = 42°01', \gamma = 86°40', \delta = 81°15'$.



$[\boldsymbol{|AB| = 1633\ \mathrm{m}}]$

3. Z pozorovatelny vysoké 12 m a vzdálené 25 m od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu $\varphi = 20°$. Vypočítejte šířku řeky.



$[\boldsymbol{x = 96{,}6\ \mathrm{m}}]$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.