Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA
VZORCE PRO OBSAH TROJÚHELNÍKU

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	9. listopadu 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem sinová a kosinová věta, zná vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Sinová věta *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

Kosinová věta *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\ cos\ \gamma.$$

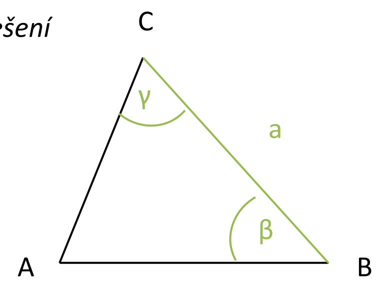
Obsah trojúhelníku *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

$$S = \frac{1}{2}\ bc\ sin\ \alpha = \frac{1}{2}\ ac\ sin\ \beta = \frac{1}{2}\ ab\ sin\ \gamma.$$

Příklad 1

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 16,5; β = 48°10´; γ = 50°40´. Dále určete jeho obsah.

Řešení



1. Nejprve pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku dopočítáme úhel α:

$$\boldsymbol{\alpha} = 180° - (\beta + \gamma) = \cdots = \mathbf{81°10'}.$$

2. Nyní pomocí sinové věty určíme velikost strany *b*:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \to \boldsymbol{b} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{16{,}5 \cdot \sin 48°10'}{\sin 81°10'} = \mathbf{12,4}.$$

3. Dále sinovou větou určíme velikost strany *c*:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \to \boldsymbol{c} = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{16{,}5 \cdot \sin 50°40'}{\sin 81°10'} = \mathbf{12,9}.$$

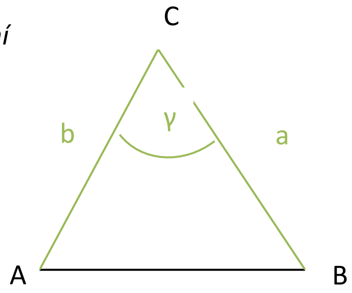
4. Nakonec určíme obsah trojúhelníku:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 16{,}5 \cdot 12{,}4 \cdot \sin 50°40' = \mathbf{79,1}.$$

Příklad 2

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 7; b = 4; γ = 38°. Dále určete jeho obsah.

Řešení



1. Kosinovou větou určíme velikost strany *c*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \qquad \text{a proto}$$

$$\boldsymbol{c} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} = \sqrt{7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 38°} \doteq \mathbf{4,6}.$$

2. Pomocí sinové věty určíme úhel α:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \to \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c} = \frac{7 \cdot \sin 38°}{4{,}6} \doteq 0{,}9369$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq \mathbf{69°32'}\,;\ \boldsymbol{\alpha'} \doteq \mathbf{110°28'}$$

3. Přes součet vnitřních úhlů v trojúhelníku určíme β:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{72°28'};\ \boldsymbol{\beta'} = \mathbf{31°32'}.$$

Zde je však nutná diskuze řešení a to vzhledem k nejednoznačnosti sinové věty. Nečárkované řešení nevyhovuje, protože není splněná podmínka, že proti větší straně leží větší úhel. Proto je v tomto případě řešení jen čárkované, tj. $\boldsymbol{\alpha'} \doteq \mathbf{110°28'}$ a $\boldsymbol{\beta'} = \mathbf{31°32'}$.

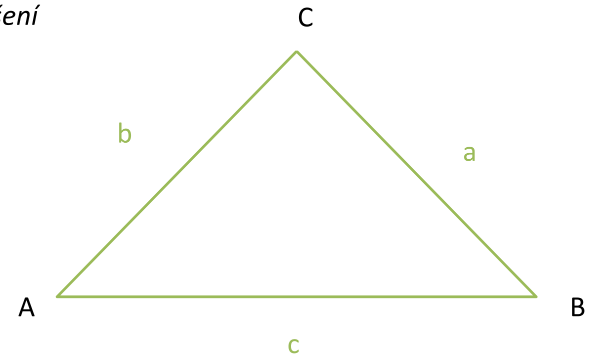
4. Nakonec určíme obsah trojúhelníku:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\cdot \sin 38° \doteq \mathbf{8{,}6}.$$

Příklad 3

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 15; b = 16; c= 17. Dále určete jeho obsah.

Řešení



1. Úhel α určíme pomocí kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha \ \rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b\cdot c} = \frac{16^2 + 17^2 - 15^2}{2\cdot 16\cdot 17} \doteq 0{,}5882$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq \mathbf{53°58'}$$

2. Úhel β můžeme určit dvěma způsoby a to
   a) Kosinovou větou (složitější výpočet, ale dostaneme jednoznačné řešení), tj.

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\cdot a\cdot c} = \frac{15^2 + 17^2 - 16^2}{2\cdot 15\cdot 17} \doteq 0{,}5059$$

$$\boldsymbol{\beta} \doteq \mathbf{59°37'}$$

   b) Sinovou větou (jednodušší výpočet, nedostáváme ale jednoznačné řešení – bude nutná diskuze), tj.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \rightarrow \sin\beta = \frac{b\ \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{16\cdot \sin 53°58'}{15} \doteq 0{,}8626$$

$$\boldsymbol{\beta} \doteq \mathbf{59°37'};\ \beta' \doteq 120°23'.$$

   Čárkované řešení ale nevyhovuje, protože opět není splněná podmínka, že proti větší straně leží větší úhel.

3. Zbývá nám určit velikost úhlu γ a to pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku, tj.

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{66°25'}$$

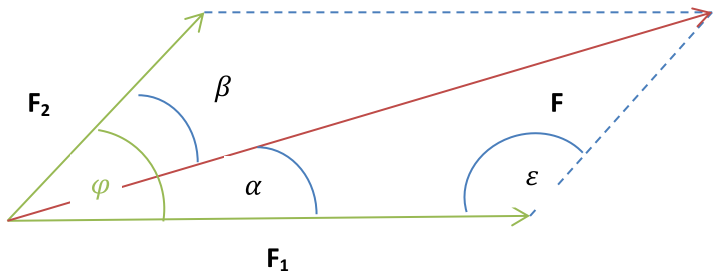
4. Nakonec určíme obsah trojúhelníku

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16\cdot \sin 66°25' \doteq \mathbf{110}.$$

Příklad 4

Na těleso působí dvě síly o velikosti F_1 = 75 N a F_2 = 60 N. Vektory sil spolu svírají úhel φ = 55°. Jak velká je výslednice sil F a jaké úhly svírá vektor síly **F** s vektory sil $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$?

Řešení



1. Nejdříve si určíme velikost úhlu ε, tj. ε = 180°- φ = … = 125°.
2. Užitím kosinové věty získáme velikost výslednice sil **F**, tedy

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\varepsilon \quad \text{a dále}$$

$$\boldsymbol{F} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\varepsilon} = \sqrt{75^2 + 60^2 - 2\cdot 75\cdot 60\cdot\cos 125°}\ \mathrm{N} \doteq \mathbf{120\ N}$$

3. Nyní určíme úhel α a to pomocí sinové věty (pozor na nejednoznačnost řešení – diskuze nutná)

$$\frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\varepsilon} \rightarrow \sin\alpha = \frac{F_2\cdot\sin\varepsilon}{F} = \frac{60\ \cdot\sin 125°}{120} \doteq 0{,}4096$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq \mathbf{24°11'}$$

   Druhé řešení $\alpha' \doteq 155°49'$ nevyhovuje podmínkám úlohy.

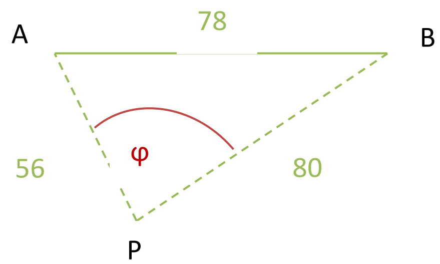
4. Nakonec určíme úhel β, $\boldsymbol{\beta} = \varphi - \alpha = 55° - 24°11' = \mathbf{30°49'}$.

Výslednice sil má velikost 120 N a se silami $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$ svírá úhly 24°11´a 30°49´.

Příklad 5

V jakém zorném úhlu se jeví pozorovateli předmět 78 metrů dlouhý, jestliže je od jednoho jeho konce vzdálený 56 metrů a od druhého konce 80 metrů?

Řešení



Zorný úhel určíme pomocí kosinové věty:

$$|AB|^2 = |PB|^2 + |PA|^2 - 2|PB|\,|PA|\,\cos\varphi$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{|PB|^2 + |PA|^2 - |AB|^2}{2|PB|\,|PA|} = \frac{80^2 + 56^2 - 78^2}{2 \cdot 56 \cdot 80} \doteq 0{,}3854$$

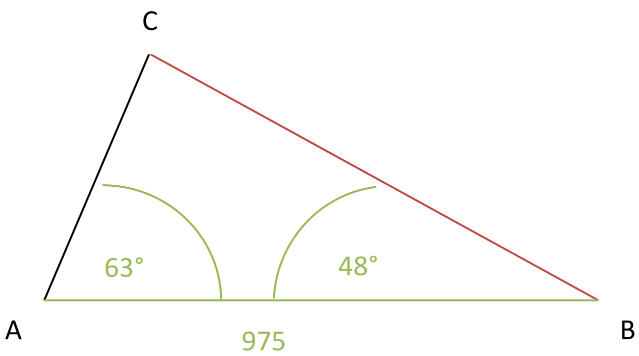
$$\boldsymbol{\varphi} \doteq \mathbf{67°20'}$$

Pozorovatel vidí předmět v zorném úhlu 67°20´.

Příklad 6

Cíl C pozorujeme ze dvou dělostřeleckých pozorovatelen A, B, které jsou od sebe vzdálené 975 metrů, přičemž $|\sphericalangle BAC| = 63°, |\sphericalangle ABC| = 48°$. Vypočítejte vzdálenost pozorovatelny B od cíle.

Řešení



1. Pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku vypočítáme úhel u vrcholu C, tedy
$$\gamma = 180° - (\alpha - \beta) = \cdots = 69°.$$
2. Sinovou větou určíme vzdálenost cíle C od pozorovatelny B
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{975 \cdot \sin 63°}{\sin 69°} \doteq \mathbf{900}\ \mathrm{m}.$$

Pozorovatelna B je od cíle vzdálená 900 metrů.

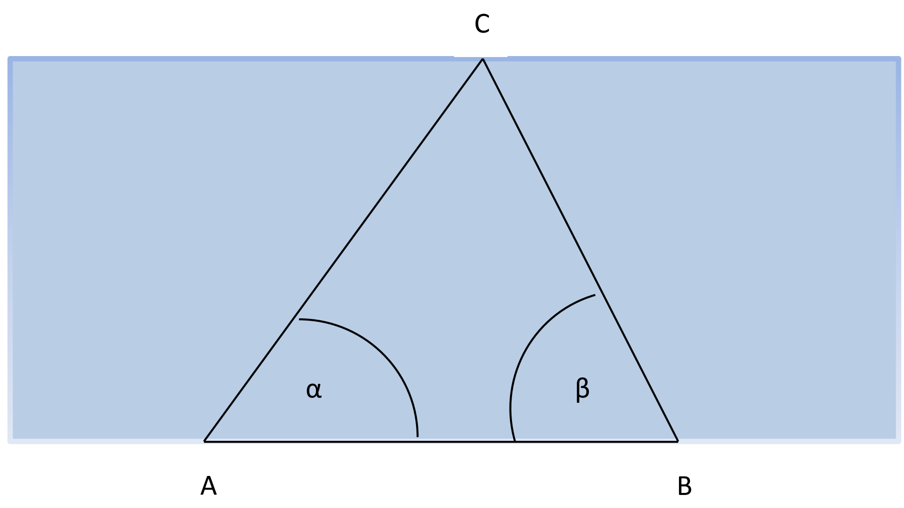
Úlohy k procvičení

1. Řešte trojúhelník ABC, jestliže znáte:
   a) a = 2; b = 3; c = 4 $[\boldsymbol{\alpha = 28°57', \ \beta = 46°34', \gamma = 104°29'}]$
   b) b = 8; c = 5; γ = 26°55´ $\begin{bmatrix} a_1 = 10{,}6;\ \beta_1 = 46°25';\ \alpha_1 = 106°40'; \\ a_2 = 3{,}7;\ \beta_2 = 133°35';\ \alpha_2 = 19°30'; \end{bmatrix}$
   c) b = 5; α = 110°; β = 28° $[\boldsymbol{a = 10; c = 7{,}1;\ \gamma = 42°}]$

2. Na těleso působí dvě síly o velikostech F_1 = 85 N, F_2 = 48 N. Jejich vektory svírají úhel 57°. Jak velká je jejich výslednice a jaký úhel svírá její vektor s vektorem síly $\mathbf{F_1}$?

   $[\boldsymbol{F \doteq 118\ N, \varepsilon \doteq 20°}]$

3. Vypočítejte šířku řeky, na jejímž jednom břehu jsme změřili vzdálenost bodů A, B, $|AB|$ = 50 m. Z koncových bodů úsečky AB je vidět bod C na druhém břehu řeky pod úhly α = 32°30´a β = 42°10´ vzhledem k úsečce AB.



$[\boldsymbol{p\check{r}ibli\check{z}n\check{e}\ 18{,}7\ \mathrm{m}}]$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.