Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH VZORCŮ

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	19. 1. 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá goniometrické vzorce a umí je aplikovat při úpravách výrazů a řešení rovnic i nerovnic a dalších příkladů
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Aniž určíte hodnotu x, vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí

$\boldsymbol{sin\ 2x, cos\ 2x, tg\ 2x, \sin 4x, \cos 4x}$**, je-li** $\boldsymbol{\cos x = -\frac{3}{5} \wedge x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)}$.

Řešení:

Při řešení využijeme vzorce:

(1) $sin^2x + cos^2x = 1$

(2) $tg\ x = \frac{\sin x}{cos\ x}$

(3) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(4) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Nejdříve si vypočteme pomocí vztahu (1) hodnotu $\sin x$*, která bude vzhledem k podmínce pro x záporná.*

$$\sin x = -\sqrt{1 - cos^2x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Ze vztahu (3) vypočteme $\sin 2x$*:*

$$\sin 2x = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

Ze vztahu (4) vypočteme $\cos 2x$*:*

$$\cos 2x = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

Pomocí vztahu (2) a předcházejících dvou výsledků vypočteme $tg2x$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

Vztah (3) využijeme i pro výpočet $\sin 4x$*:*

$$\sin 4x = \sin(2 \cdot 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \cdot \frac{24}{25} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{336}{625}$$

Podobně využijeme vztah (4) pro stanovení hodnoty $\cos 4x$*:*

$$\cos 4x = \cos(2 \cdot 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} - \frac{576}{625} = -\frac{527}{625}$$

Závěr:

$sin2x = \frac{24}{25}; cos2x = -\frac{7}{25}; tg2x = -\frac{24}{7};\ \sin 4x = -\frac{336}{625};\ \cos 4x = -\frac{527}{625}$

2) Dokažte, že pro přípustné hodnoty $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ platí:

$$\boldsymbol{\frac{\cos 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4}\sin^2 2x}$$

Řešení:

Pomocí vhodných vzorců budeme upravovat levou stranu rovnosti tak, abychom získali výraz na pravé straně.

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= (\sin x \cdot \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \sin 2x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

Rovnost je platná.

Nyní je nutné stanovit, pro která $x \in R$ rovnost platí.

Platí následující podmínky:

- *musí být definována funkce* $\operatorname{cotg} \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{x} \neq \mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$
- *musí být definována funkce* $\operatorname{tg} x \rightarrow \mathrm{x} \neq (2\mathrm{k}+1)\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

$\Big\}$ *spojit do jedné podmínky* $x \neq \mathrm{k}\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

- *musí platit* $\cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq \pm \sin x \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z$

Obě zvýrazněné podmínky lze spojit a vyjádřit ve tvaru: $x \neq \mathrm{k}\frac{\pi}{4}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

3) Pomocí vhodných goniometrických vzorců upravte výraz:

$$\boldsymbol{\frac{\sin(30° + x) - \sin(30° - x)}{\cos(60° + x) + \cos(60° - x)}}$$

Řešení:

V 1. kroku úprav použijeme následující vzorce:

(1) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$

(2) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

Získáme výraz:

$$\frac{2\cos 30° \cdot \sin x}{2\cos 60° \cdot \cos x}$$

Vykrátíme, známé hodnoty vyčíslíme a podíl funkcí $\sin x$ *a* $\cos x$ *nahradíme funkcí* $\operatorname{tg} x$ *a získáme:*

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x$$

Zbývá už jenom podmínka: $\mathrm{x} \neq (2\mathrm{k}+1)\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

4) Určete pravdivostní hodnotu výroku:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{cotg} 50°} = \sin 50°}$$

Řešení:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{cotg} 50°} = \frac{1}{\frac{\sin 25°}{\cos 25°} + \frac{\cos 50°}{\sin 50°}} = \frac{\cos 25° \cdot \sin 50°}{\sin 25° \cdot \sin 50° + \cos 50° \cdot \cos 25°} =$$

$$= \frac{\cos 25° \cdot 2 \cdot \sin 25° \cdot \cos 25°}{\sin 25° \cdot 2 \cdot \sin 25° \cdot \cos 25° + (\cos^2 25° - \sin^2 25°) \cdot \cos 25°} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 25° \cdot \cos^2 25°}{2 \cdot \sin^2 25° \cdot \cos 25° + \cos^3 25° - \sin^2 25° \cdot \cos 25°} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 25° \cdot \cos^2 25°}{\cos 25° \cdot (2 \cdot \sin^2 25° + \cos^2 25° - \sin^2 25°)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 25° \cdot \cos 25°}{\sin^2 25° + \cos^2 25°} = \sin 50°$$

Úpravami jsme dospěli od levé strany k pravé, výrok je pravdivý.

5) Zjednodušte výrazy a stanovte podmínky:

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=$$

$$\frac{2\cot\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}=$$

Řešení:

Při úpravě 1. výrazu použijeme vzorce pro dvojnásobný úhel.

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2\sin x\cos x}+\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=$$
$$=\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}+\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=2\operatorname{tg} x$$

Podmínky:

$\sin 2x\neq 0\ \rightarrow\ 2x\neq k\pi, k\in Z\ \rightarrow\ x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$\cos 2x\neq -1\ \rightarrow\ 2x\neq \pi+2k\pi, k\in Z\ \rightarrow\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

$\sin x\neq 0\ \rightarrow\ x\neq k\pi, k\in Z$

$\cos x\neq 0\ \rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

Všechny podmínky jsou obsaženy v první z nich.

Při úpravě 2. výrazu uplatníme definici funkce $\operatorname{cotg} x$ *a ve jmenovateli si vytkneme (-1).*

$$\frac{2\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}=$$

V získaných výrazech bychom měli vidět vzorce pro dvojnásobný úhel.

$$=\frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$$

Podmínky:

musí být definována funkce $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\ \rightarrow\ \frac{x}{2}\neq k\pi, k\in Z\ \rightarrow x\neq 2k\pi, k\in Z$

musí být definována funkce $\operatorname{tg} x\ \rightarrow\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$

musí platit $\sin\frac{x}{2}\neq\pm\cos\frac{x}{2}\ \rightarrow\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in Z\ \rightarrow\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$

Označené podmínky platí současně.

Příklady k procvičování:

1) Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty goniometrických funkcí
$sin\ 2x, cos\ 2x, tg\ 2x, \sin 4x, \cos 4x$, je-li $\cos x = \frac{3}{4} \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

správné řešení:
$sin2x = -\frac{3\sqrt{7}}{8}; cos2x = -\frac{1}{8}; tg2x = 3\sqrt{7};\ \sin 4x = \frac{3\sqrt{7}}{32};\ \cos 4x = -\frac{31}{32}$

2) Ukažte, že pro všechna $x \in R$ platí rovnost: $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$

3) Pomocí vhodných goniometrických vzorců upravte výraz a stanovte podmínky:
$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$$

správné řešení:
$\mathrm{tg}\, 2x\,; x \neq k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in Z$

4) Pro $x = -\frac{5\pi}{6}$ vypočtěte hodnotu výrazu:
$$\frac{\cos(2\pi - 2x) + \sin^2 x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

správné řešení: $\sqrt{3}$

5) Určete pravdivostní hodnotu výroku:
$$\frac{\sin 40° \cdot \sin 70°}{(1 + \cos 40°) \cdot (1 + \cos 20°)} = \mathrm{tg}\, 10°$$

správné řešení: výrok je pravdivý
nápověda: $\sin x = \cos(90° - x)$

6) Zjednodušte výrazy a stanovte podmínky:

$$\frac{1}{1-\sin x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{1+\sin x}=$$

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}=$$

správné řešení:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\operatorname{tg} x \wedge x \neq \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right], k \in Z$$

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.
PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.
KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.
BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.