Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	4. 1. 2014
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák při řešení goniometrických rovnic využívá znalost vztahů mezi goniometrickými funkcemi, hodnot goniometrických funkcí, goniometrických vzorců a také metodu substituce.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1. Řešte v **R** rovnici: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$

   Řešení:

   Nejprve využijeme substituci a výraz v závorce nahradíme neznámou t

   $t=2x+\frac{\pi}{6}$

   Dále řešíme základní rovnici

   $\sin t=-1$

   $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

   Nyní se vrátíme k substituci a za t dosadíme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$:

   $\frac{3\pi}{2}+2k\pi=2x+\frac{\pi}{6}$

   $2x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

   $2x=\frac{8\pi}{6}+2k\pi$

   $2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

   $\underline{\underline{x=\frac{2\pi}{3}+k\pi}}$

   $K=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi;k\in Z\right\}$

2. Řešte v **R** rovnici: $\sin x+\cos 2x=0$

   Řešení:

   Nejprve využijeme vzorce $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

   $\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

   Abychom měli v rovnici pouze jednu goniometrickou funkci, položíme $\cos^2 x=1-\sin^2 x$:

$$\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$$
$$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Využijeme substituci a zavedeme pomocnou neznámou $t = \sin x$. Získáme kvadratickou rovnici:

$$2t^2 - t - 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$
$$t_1 = 1$$
$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

Nyní se vrátíme k substituci a za t dosadíme 1 a $-\frac{1}{2}$:

$$1 = \sin x_1$$
$$\underline{\underline{x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}}$$

$$-\frac{1}{2} = \sin x_{2,3}$$
$$\underline{\underline{x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi}}$$
$$\underline{\underline{x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi}}$$

$$K = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in Z \right\}$$

3. Řešte v **R** rovnici: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

Řešení:

Využijeme vzorce $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$. Nejprve je vhodné si rozmyslet, pro které dvojice sčítanců daný vzorec uplatnit:

$$(\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x) = 0$$
$$2\sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} + 2\sin \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} = 0$$
$$2\sin 2x \cdot \cos x + 2\sin 3x \cos x = 0$$

$$2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 0$$

$$2\cos x \cdot 2\sin\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos x \cdot \sin\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 0$$

Vytknutím $\cos x$ a opětovným využitím vzorce $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$ jsme získali rovnici v součinovém tvaru. Na pravé straně máme nulu. Součin tří činitelů je roven nule právě tehdy, pokud je aspoň jeden z činitelů roven nule. Budeme tedy řešit tři jednoduché rovnice, kdy jednotlivé činitele položíme rovny nule:

$$\cos x_1 = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi}}$$

$$\sin\frac{5x_2}{2} = 0$$

Zavedeme substituci: $t = \frac{5x_2}{2}$. Získáme:

$$\sin t = 0$$

$$t = k\pi$$

$$\frac{5x_2}{2} = k\pi$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{2k\pi}{5}}}$$

$$\cos\frac{x_3}{2} = 0$$

Zavedeme substituci: $r = \frac{x_3}{2}$. Získáme:

$$\cos r = 0$$

$$r = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{x_3}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \pi + 2k\pi$$

$$\underline{\underline{x_3 = (2k+1)\pi}}$$

$$K = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2k\pi}{5}, (2k+1)\pi; k \in Z\right\}$$

4. Řešte v **R** rovnici: $\sin x = \sqrt{2} - \cos x$

Řešení:

Nejprve rovnici umocníme na druhou:

$$\sin^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\cos x + \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$$

Zavedeme substituci: $r = \cos x$

$$2r^2 - 2\sqrt{2}r + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

Provedli jsme umocnění obou stran rovnice na druhou, což je neekvivalentní úprava, a proto budeme muset provést zkoušku:

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) = P\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$L\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \cos\frac{7\pi}{4} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L\left(\frac{7\pi}{4}\right) \neq P\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$K = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

5. Řešte v **R** rovnici: $7\sin 2x - 2\cos^2 x = 6$

Řešení:

Nejprve využijeme vzorec $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$7 \cdot 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 6$$
$$7\sin x\cos x - \cos^2 x = 3$$

Následně aplikujeme vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, platí tedy $3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 3$. Výrazem $3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ tedy můžeme nahradit pravou stranu rovnice:

$$7\sin x\cos x - \cos^2 x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$
$$7\sin x\cos x - \cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$$
$$3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 7\sin x\cos x = 0 \quad \Big/ \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - 7\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} = 0$$
$$3tg^2 x + 4 - 7tgx = 0\frac{4}{3 = tgx}$$
$$3tg^2 x - 7tgx + 4 = 0$$
$$sub.: \; y = tgx$$
$$3y^2 - 7y + 4 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 3\cdot 4}}{3\cdot 2}$$
$$y_1 = 1$$
$$y_2 = \frac{4}{3}$$
$$sub.:$$
$$1 = tgx_1$$
$$x_1 = 45° + k\cdot 180$$

$$sub.:$$
$$\frac{4}{3} = tgx_2$$
$$x_2 = 53°08' + k\cdot 180$$

$$K = \{45° + k\cdot 180,\ 53°08' + k\cdot 180; k \in Z\}$$

6. Řešte v **R** rovnici: $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1+\cos 2x$

Řešení:

Nejprve využijeme vzorce: $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

Získáme rovnici:

$$\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=1+\cos 2x$$

$$\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1+\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\cos x=1+\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$\cos x=2\cos^2 x$$

$$\cos x-2\cos^2 x=0$$

$$\cos x\cdot(1-2\cos x)=0$$

Na pravé straně rovnice máme nulu. Součin dvou činitelů je roven nule právě tehdy, pokud je aspoň jeden z činitelů roven nule. Budeme tedy řešit dvě jednoduché rovnice, kdy jednotlivé činitele položíme rovny nule:

$\cos x=0 \quad \vee \quad 1-2\cos x=0$

$\cos x_1=0$

$x_1=\left(2k+1\right)\pi$

$1-2\cos x=0$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$$K=\left\{\left(2k+1\right)\pi,\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in Z\right\}$$

Příklady k procvičování:

1. Řešte v **R** rovnici:

   $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ $[K=\left\{\frac{5\pi}{8}+k\pi;\,k\in Z\right\}]$

2. Řešte v **R** rovnici:

   $2\sin^2 x+1=5\cos x$ $[K=\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi;\,k\in Z\}]$

3. Řešte v **R** rovnici:

   $2\sin x=\sqrt{3}\cdot tgx$ $[K=\{k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi;\,k\in Z\}]$

4. Řešte v **R** rovnici:

   $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$ $[K=\{(3k\pm 1)\frac{2}{3}\pi,(4k+1)\frac{\pi}{8};\,k\in Z\}]$

5. Řešte v **R** rovnici:

   $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ $[K=\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi;\,k\in Z\}]$

6. Řešte v **R** rovnici:

   $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$

   $[K=\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\frac{23\pi}{12}+2k\pi;\,k\in Z\}]$

7. Řešte v **R** rovnici:

   $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $[K=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi;\,k\in Z\right\}]$

Použité zdroje a literatura:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KOVÁČIK, Ján A KOL. *Řešené příklady z matematiky pro střední školy*. 1. vyd. Praha: ASPI Publishing,2004,
712 s. ISBN 80-7357-005-X.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. ISBN 80-719-6030-6.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.