Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	12. 01. 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák zná definice goniometrických funkcí, zná a umí aplikovat základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi, načrtne grafy goniometrických funkcí, umí z nich vyčíst vlastnosti
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Aniž použijete kalkulačku, určete hodnoty funkcí $\boldsymbol{\sin x, \cos x, cotg\, x}$, je-li $\boldsymbol{tg\, x = -\frac{2}{3} \wedge x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)}$.

Řešení:

Při řešení využijeme základní vztahy mezi hodnotami goniometrických funkcí:

(1) $sin^2x + cos^2x = 1$

(2) $cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}$

(3) $tg\ x = \frac{\sin x}{cos\ x}$

Výpočet $cotg\ x$:

$cotg\ x = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$

Výpočet $\cos\ x$:

Ze vztahu (3) vyjádříme $\sin x \Rightarrow \sin x = tg\ x \cdot \cos x$. *Za fci* $\sin x$ *ze vztahu (1) dosadíme* $\sqrt{1 - cos^2x} \Rightarrow$

$\sqrt{1 - cos^2x} = -\frac{2}{3} \cdot cos\ x$ *.......... umocnit*

$$1 - cos^2x = \frac{4}{9}cos^2x$$

$$1 = \frac{13}{9}cos^2x$$

$$cos^2x = \frac{9}{13}$$

$|cos\ x| = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, *protože* $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, *je řešením* $\cos x = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

Výpočet $\sin x$:

Ze vztahu (1) si vyjádříme $|\sin x| = \sqrt{1 - cos^2x}$. *Protože* $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, *bude hodnota funkce* $\sin x$ *záporná.*

$$\sin x = -\sqrt{1 - \frac{9}{13}} = -\sqrt{\frac{4}{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Závěr:

$$sinx = -\frac{2\sqrt{13}}{13}; cosx = \frac{3\sqrt{13}}{13}; cotgx = -\frac{3}{2}$$

2) Určete definiční obory funkcí: $f: y = \sqrt{sinx}$; $g: y = \log(sinx)$; $h: y = \sqrt{\log(sinx)}$.

Řešení:

Aby byla funkce f definována, musí být pod odmocninou nezáporné číslo. Tedy platí: $\sin x \geq 0$. *Oborem hodnot funkce* $\sin x$ *je interval* $\langle -1; 1 \rangle$, *proto je zřejmé, že* $\sin x \in \langle 0; 1 \rangle$. *Z jednotkové kružnice nebo z průběhu grafu funkce* $\sin x$ *snadno odvodíme, že*

$$x \in \langle 0 + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle, k \in Z$$

Definičním oborem funkce f je sjednocení těchto intervalů, což zapíšeme následujícím způsobem: $D(f) = \bigcup_{k \in Z}\{\langle 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle\}$.

Aby byla definována funkce g, musí být v argumentu logaritmu kladné číslo, proto $\sin x > 0$. *Další postup je podobný jako při stanovování definičního oboru funkce f. Tedy*

$$\sin x \in (0; 1\rangle \ \Rightarrow \ x \in (0 + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi), k \in Z$$

Zapíšeme definiční obor funkce g: $D(g) = \bigcup_{k \in Z}\{(2k\pi;\ \pi + 2k\pi)\}$.

Pro stanovení definičního oboru funkce h platí: $\log(\sin x) \geq 0 \ \Rightarrow \sin x \geq 1$. *Vzhledem k oboru hodnot funkce* $\sin x$, *vyhovuje podmínce jen* $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$.

Definiční obor funkce h lze zapsat ve tvaru: $D(h) = \bigcup_{k \in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.

3) Určete hodnoty goniometrických funkcí:

$f: y = cos2x$; $g: y = \sin^2 x - \cos x$; $h: y = \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$, **pro** $x = \frac{25\pi}{6}$.

Řešení:

Goniometrické funkce jsou periodické, proto si x nejdříve upravíme:

$$x = \frac{25\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

Pro stanovení hodnot daných funkcí již stačí použít pouze $x = \frac{\pi}{6}$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{4}$$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Závěr:

$$f\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};\ g\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{4};\ h\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4) Jaké podmínky musí platit pro $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}$, aby rovnice $\cos \boldsymbol{x} = \frac{2-m}{3}$ o neznámé $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ a parametru $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}$, měla neprázdnou množinu řešení?

Řešení:

Aby rovnice měla neprázdnou množinu řešení, musí zlomek na levé straně rovnice patřit do oboru hodnot funkce $y = \cos x$. Platí tedy:

$-1 \leq \dfrac{2-m}{3} \leq 1$

$-3 \leq 2 - m \leq 3$

$-5 \leq -m \leq 1$

$5 \geq m \geq -1$

Jinak řečeno $m \in \langle -1; 5 \rangle$

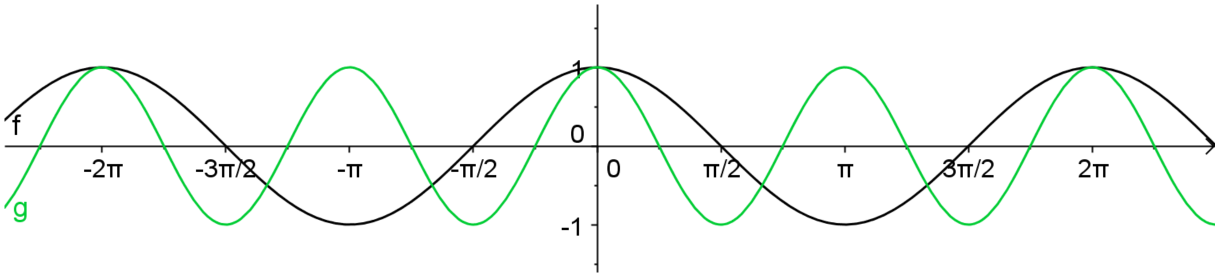
5) Načrtněte graf funkce $\boldsymbol{y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1}$.

Řešení:

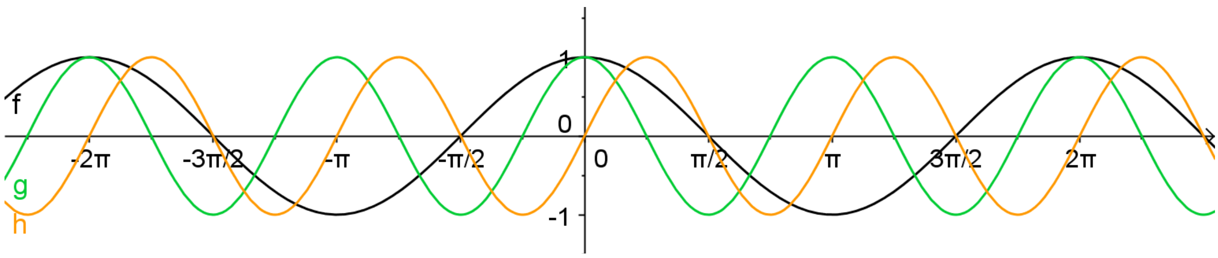
Abychom mohli graf dané funkce dobře načrtnout, provedeme úpravu rovnice funkce:

$$y = 3\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$$

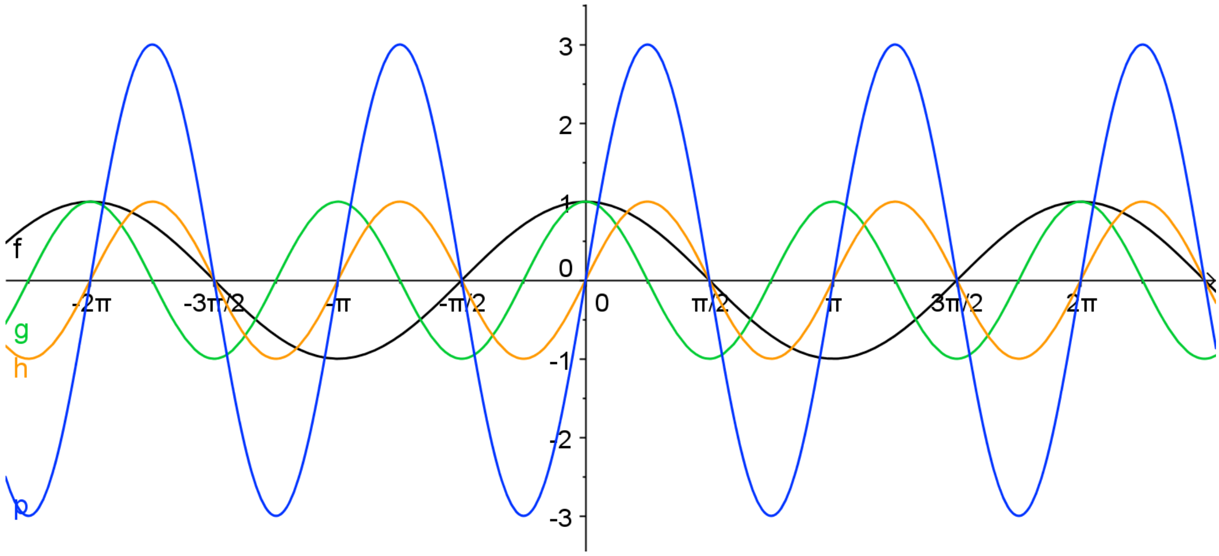
Vycházíme z grafu funkce $f: y = \cos x$ a musíme si uvědomit význam jednotlivých koeficientů. Začínáme koeficientem 2, který ovlivňuje velikost nejmenší periody (frekvenci), v našem případě ji zmenší ze 2π na π a sestrojíme graf funkce $g: y = \cos 2x$.



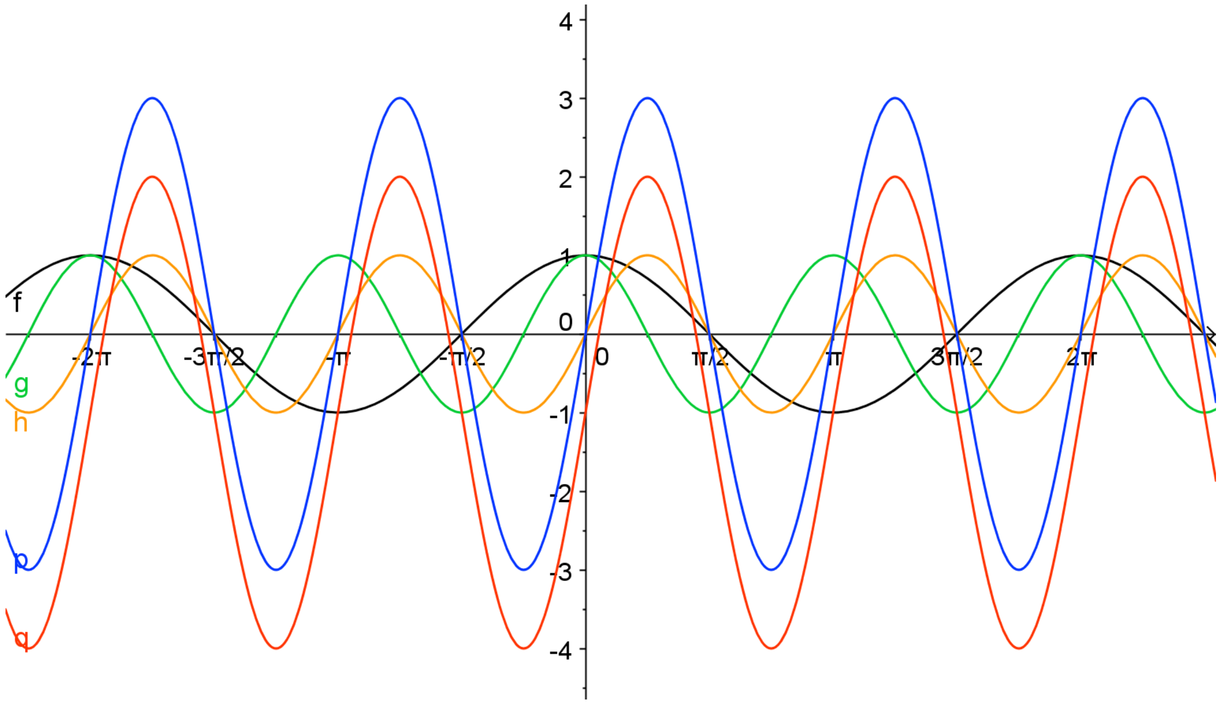
Dalším koeficientem je $-\frac{\pi}{4}$, který ovlivňuje posun grafu ve směru osy x. V našem případě dojde k posunu grafu funkce $g: y = \cos 2x$ o $\frac{\pi}{4}$ ve směru kladné poloosy x. Získáme graf funkce $h: y = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.



Nyní se budeme věnovat koeficientu 3. Má vliv na tzv. amplitudu. Mění totiž obor hodnot, v našem případě bude oborem hodnot interval $\langle -3; 3\rangle$. *Sestrojím graf funkce* $p: y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.



A zbývá poslední koeficient -1. *Ten má vliv na posun grafu ve směru osy y, v našem konkrétním případě se graf funkce p posune o 1 ve směru záporné poloosy y. A zakreslíme graf naší funkce ze zadání. Na obrázku červený graf funkce* $q: y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$.



6) Sestrojte graf funkce:

a) $\boldsymbol{f: y = \sin x + \sin|x|}$

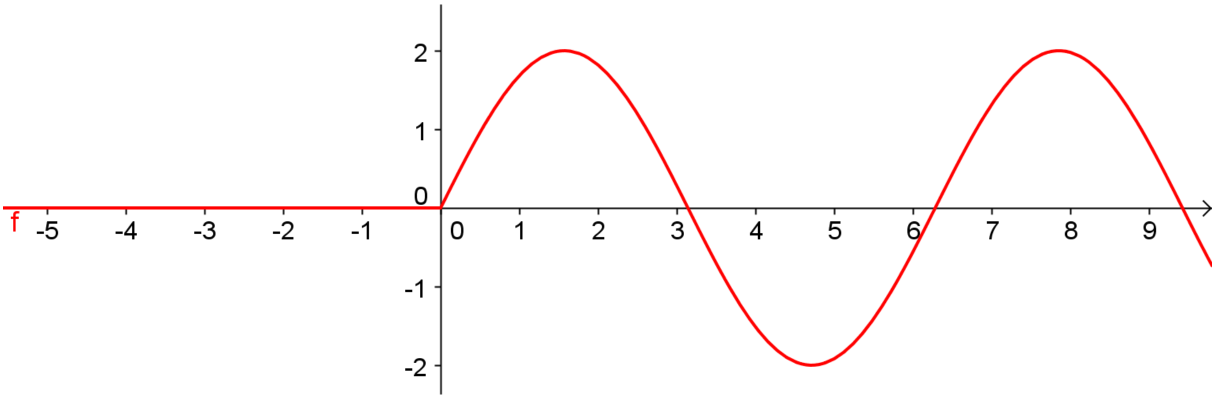
b) $\boldsymbol{g: y = \sin x - |\sin x|}$

Řešení:

a) U funkce f je neznámá v absolutní hodnotě, proto musíme uvažovat, jak bude vypadat funkce f v případě, kdy $x \geq 0$, a jak v případě, kdy $x < 0$.

$x \geq 0$*:* $f: y = \sin x + \sin x = 2\sin \mathrm{x} \Rightarrow$ *funkce s oborem hodnot* $\langle -2; 2 \rangle$

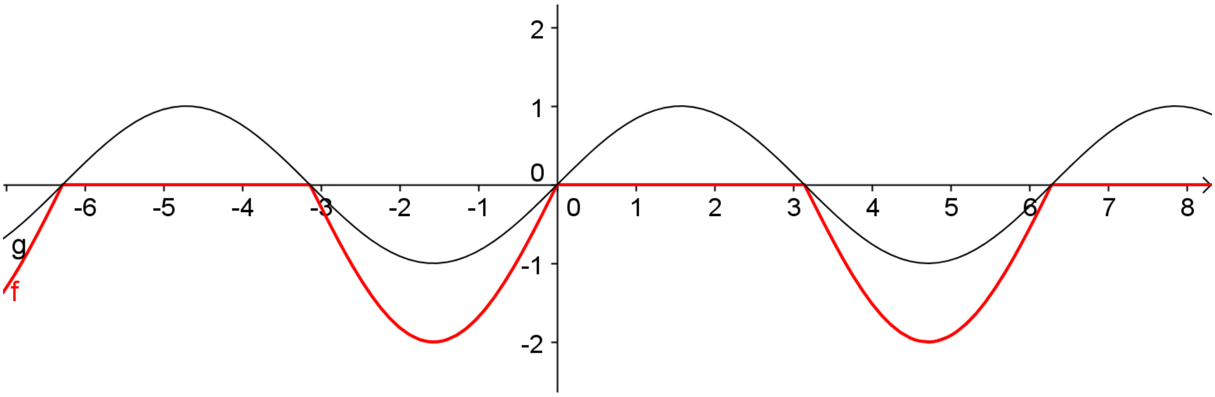
$x < 0$*:* $f: y = \sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = 0 \Rightarrow$ *konstantní funkce*



b) U funkce g j e v absolutní hodnotě sin x, proto i nyní uvažujeme 2 případy.

$\sin x \geq 0$ *je pro každé* $x \in \langle 0 + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi \rangle, k \in Z \Rightarrow g: y = \sin x - \sin x = 0 \Rightarrow$ *konstantní funkce*

$\sin x < 0$ *je pro každé* $x \in \langle -\pi + 2k\pi;\ 0 + 2k\pi \rangle, k \in Z \Rightarrow g: y = \sin x - (-\sin x) = 2sinx \Rightarrow$ *funkce s oborem hodnot* $\langle -2; 2 \rangle$



Graf funkce g zakreslen spolu s grafem funkce sin x, aby byly dobře viditelné intervaly, v nichž funkce sin x nabývá nezáporných hodnot, a intervaly, ve kterých má záporné hodnoty.

Poznámka:

Záměrně použito dvojí vyjádření obloukové míry na souřadné ose x.

Příklady k procvičování:

1) Aniž použijete kalkulačku, určete hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, je-li $\operatorname{cotg} x = -\frac{5}{2} \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

správné řešení:

$$sinx = \frac{5\sqrt{29}}{29}; cosx = -\frac{2\sqrt{29}}{29}; tgx = -\frac{2}{5}$$

2) Určete definiční obory funkcí:

$f: y = \sqrt{1 + sinx};\ g: y = \log(1 - sinx);\ h: y = \sqrt{\log(1 - sinx)}.$

správné řešení:

$$D(f) = R;\ D(g) = R \setminus \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\};\ D(h) = \bigcup_{k\in Z}\{\langle -\pi + 2k\pi;\ 0 + 2k\pi\rangle\}$$

3) Určete hodnoty goniometrických funkcí

$f: y = -\sin 2x$; $g: y = \cos^2 x - \sin\frac{x}{2}$; $h: y = \operatorname{cotg} 2x - \operatorname{tg}^2 x$, pro $x = \frac{20\pi}{3}$.

správné řešení:

$$f\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ g\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \frac{1-2\sqrt{3}}{4};\ h\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-9}{3}$$

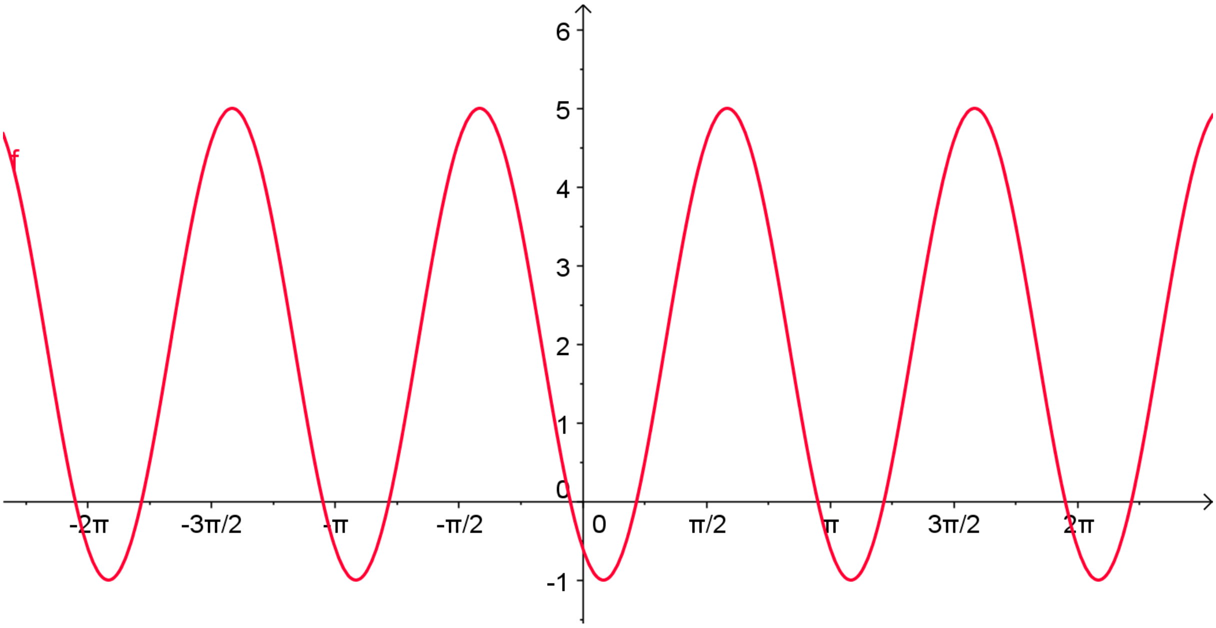
4) Jaké podmínky musí platit pro $m \in R$, aby rovnice $\sin x = \frac{m+5}{4}$ o neznámé $x \in R$ a parametru $m \in R$, měla neprázdnou množinu řešení?

správné řešení:

$m \in \langle -9;\ -1\rangle$

5) Načrtněte graf funkce $y = -3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

správné řešení:



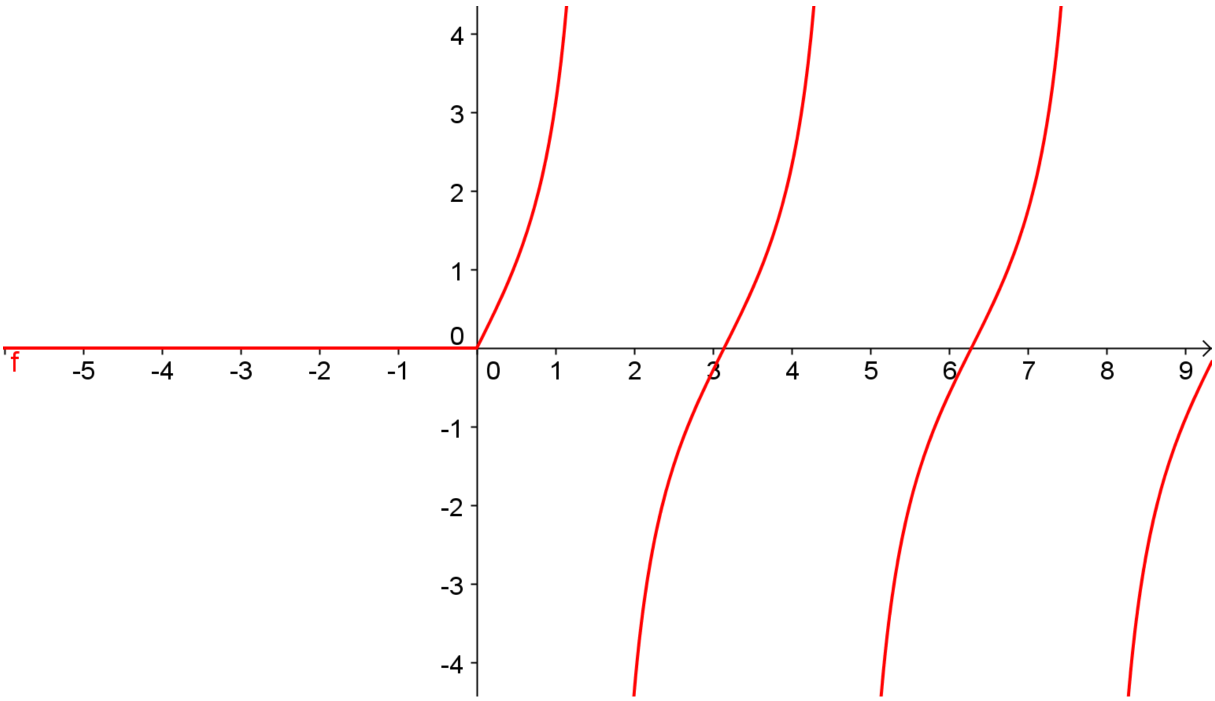
6) Sestrojte graf funkce:

a) $f: y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}|x|$

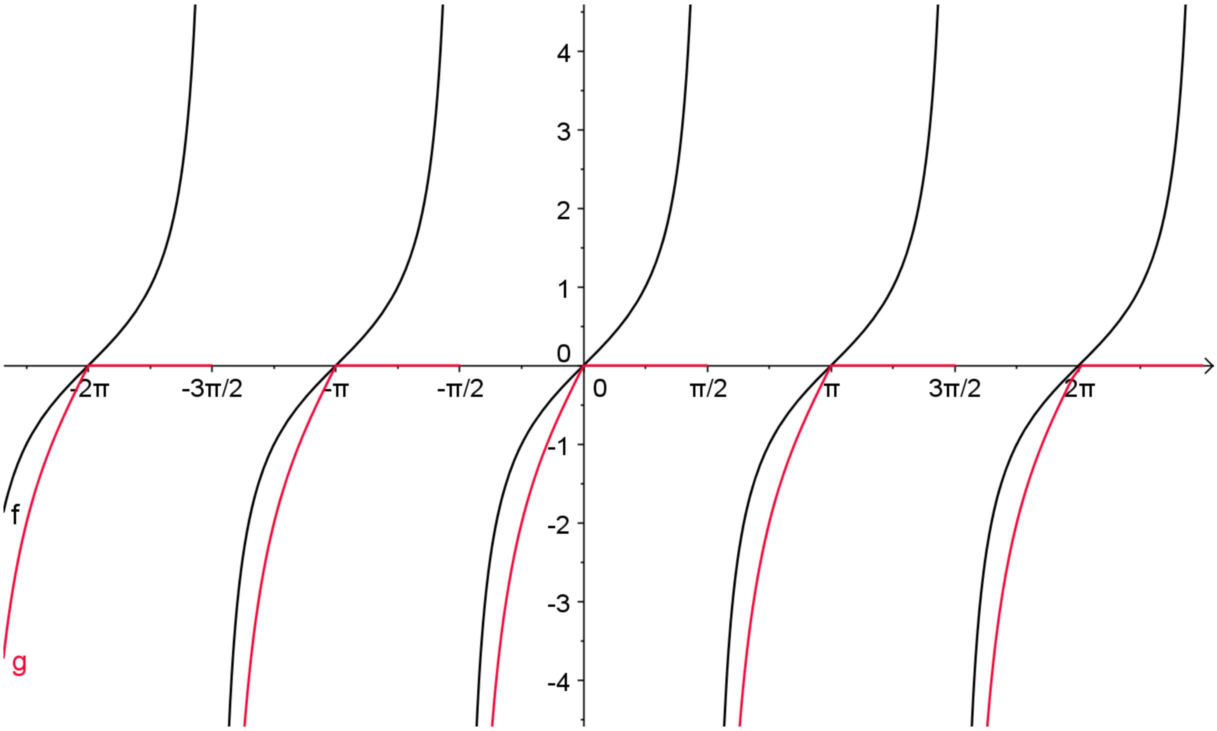
b) $g: y = \operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x|$

správné řešení:

a)

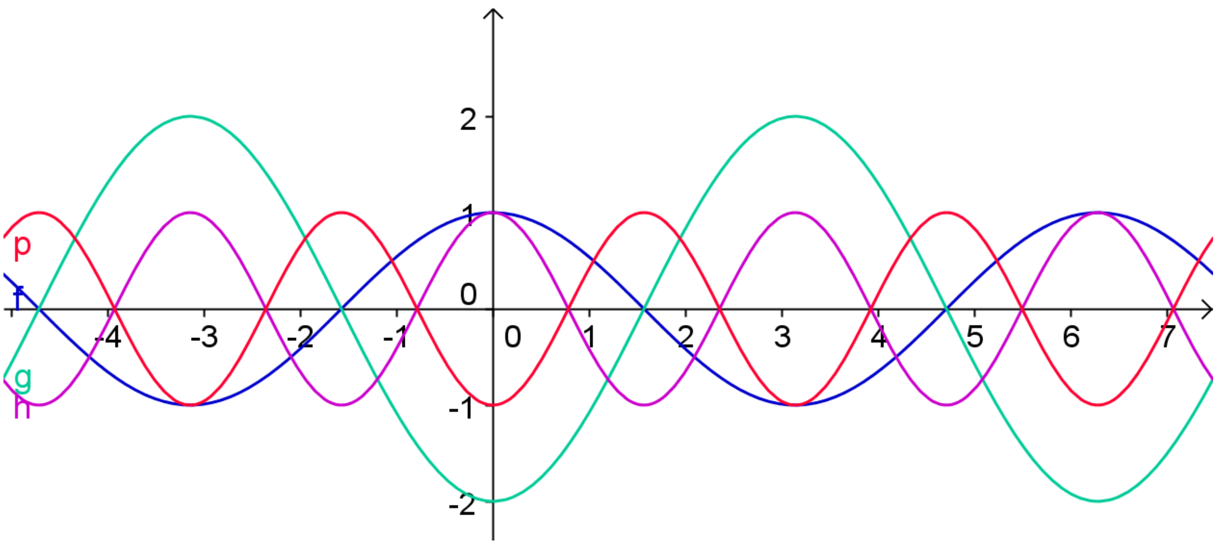


b) pro ujasnění je zakreslen i graf funkce tg x



7) V téže soustavě souřadné zakreslete grafy funkcí:
$f: y = \cos x$; $g: y = -2\cos x$; $h: y = \cos 2x$; $p: y = \cos(2x + \pi)$

správné řešení:



Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.