Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

LOGARITMICKÉ ROVNICE

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	8. 1. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá definici logaritmu a pravidla pro počítání s logaritmy a umí je aplikovat při řešení logaritmických rovnic
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Teorie:

Logaritmické rovnice jsou rovnice, kde neznámá se vyskytuje v argumentu logaritmu. Při řešení logaritmických rovnic využíváme definici logaritmu, vlastnosti logaritmických funkcí a následující pravidla:

- $\forall\, a > 0, a \neq 1, \forall\, x_1, x_2 \in R^+: \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow\ x_1 = x_2$
- $\forall\, a > 0, a \neq 1, \forall\, r, s \in R^+: \log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$
- $\forall\, a > 0, a \neq 1, \forall\, r, s \in R^+: \log_a \left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$
- $\forall\, a > 0, a \neq 1, \forall\, r \in R^+, \forall\, s \in R: \log_a r^s = \mathrm{s} \cdot \log_a r$

Řešené příklady:

1) V R řešte rovnici $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$.

Rovnici můžeme řešit tak, že stanovíme její definiční obor nebo tento krok neučiníme a pak musíme nutně provádět zkoušku správnosti. Ukážeme způsob se stanovením definičního oboru.

Pro stanovení definičního oboru platí 3 podmínky:

1. $\log(4\mathrm{x}-15) \neq 0\ \Rightarrow 4\mathrm{x}-15 \neq 1\ \Rightarrow \mathrm{x} \neq 4$
2. $2\mathrm{x} > 0\ \Rightarrow \mathrm{x} > 0$
3. $4\mathrm{x}-15 > 0\ \Rightarrow \mathrm{x} > \frac{15}{4}$

Všechny 3 podmínky platí současně, definiční obor rovnice je tedy jejich průnikem:

$$\left(\frac{15}{4}; 4\right) \cup (4;\ \infty)$$

Nyní přistoupíme k řešení rovnice:

$$\frac{\log 2\mathrm{x}}{\log(4\mathrm{x}-15)} = 2$$
$$\log 2\mathrm{x} = 2 \cdot \log(4\mathrm{x}-15)$$
$$\log 2\mathrm{x} = \log(4\mathrm{x}-15)^2$$
$$2\mathrm{x} = (4\mathrm{x}-15)^2$$
$$2\mathrm{x} = 16\mathrm{x}^2 - 120\mathrm{x} + 225$$
$$16\mathrm{x}^2 - 122\mathrm{x} + 225 = 0\ \Rightarrow\ \mathrm{x}_1 = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8};\ \mathrm{x}_2 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Pouze druhý kořen patří do definičního oboru dané rovnice a je tedy jejím jediným řešením.

---

2) V R řešte rovnici $\frac{2+\log x}{\log x} - \frac{1}{2-\log x} = 1$.

U této rovnice nebudeme stanovovat definiční obor, proto zkouška správnosti bude nedílnou součástí řešení.

Při řešení využijeme substituci $\log x = y$.

$$\frac{2+y}{y}-\frac{1}{2-y}=1$$
$$4-y^2-y=2y-y^2$$
$$y=\frac{4}{3}$$
Vrátíme se k substituci $\Rightarrow$ $\log x=\frac{4}{3}$

Dle definice logaritmu platí: $x=10^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{10^4}=\sqrt[3]{10\,000}$

Provedeme zkoušku správnosti.

$$L=\frac{2+\log 10^{\frac{4}{3}}}{\log 10^{\frac{4}{3}}}-\frac{1}{2-\log 10^{\frac{4}{3}}}=\frac{2+\frac{4}{3}\cdot\log 10}{\frac{4}{3}\cdot\log 10}-\frac{1}{2-\frac{4}{3}\cdot\log 10}=\frac{2+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2-\frac{4}{3}}=$$
$$=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{4}{3}}-\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{10}{4}-\frac{3}{2}=1$$
$$P=1$$
$$L=P$$
Zkouška potvrdila, že rovnice má jediné řešení a sice $x=10^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{10^4}=\sqrt[3]{10\,000}$.

---

3) V R řešte rovnici $\log(x^3-1)-\log 49-\log x=\log(x-1)-\log 15$.

Pomocí vět o logaritmech rovnici upravíme na tvar:

$$\log\frac{x^3-1}{49x}=\log\frac{x-1}{15}$$
Porovnáme argumenty logaritmů a budeme řešit rovnici:

$$\frac{x^3-1}{49x}=\frac{x-1}{15}$$
$$15(x-1)(x^2+x+1)=49x(x-1)$$
$$(x-1)(15x^2+15x+15-49x)=0$$
$$(x-1)(15x^2-34x+15)=0$$
Získali jsme rovnici v součinovém tvaru, vyřešením získáme 3 kořeny:

$x_1=1\qquad x_2=\frac{5}{3}\qquad x_3=\frac{3}{5}$

Zkouškou zjistíme, zda všechny tři získané hodnoty jsou řešením dané rovnice.

$L(1)=\log(1-1)-\log 49-\log 1$ - *označený argument je 0, ale logaritmus je definován pro kladné hodnoty, číslo 1 tedy není řešením dané rovnice*

$$L\left(\frac{5}{3}\right)=\log\left(\frac{125}{27}-1\right)-\log 49-\log\frac{5}{3}=\log\frac{98}{27}-\log 49-\log\frac{5}{3}=\log\left(\frac{98}{27}\cdot\frac{1}{49}\cdot\frac{3}{5}\right)=\log\frac{2}{45}$$

$P\left(\frac{5}{3}\right) = \log\left(\frac{5}{3} - 1\right) - \log 15 = \log\frac{2}{3} - \log 15 = \log\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{15}\right) = \log\frac{2}{45}$

$L\left(\frac{5}{3}\right) = P\left(\frac{5}{3}\right)$

Na základě zkoušky je kořen $x_2 = \frac{5}{3}$ řešením dané rovnice.

$L\left(\frac{3}{5}\right) = \log\left(\frac{27}{125} - 1\right) - \log 49 - \log\frac{3}{5}$ *- označený argument je záporné číslo, ale logaritmus je definován pro kladné hodnoty, číslo $\frac{3}{5}$ není kořenem dané rovnice*

---

4) V R řešte rovnici $\mathbf{1 - \log\sqrt{2x-1} = \log\sqrt{x-9}}$.

Při první úpravě rovnice uplatníme definici logaritmu ($1 = \log 10$) a pravidla pro počítání s logaritmy a získáme rovnici ve tvaru:

$\log\frac{10}{\sqrt{2x-1}} = \log\sqrt{x-9} \ \Rightarrow\ \frac{10}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-9}$

Dál budeme řešit rovnici s neznámou pod odmocninou.

$10 = \sqrt{(2x-1)(x-9)}$

$100 = 2x^2 - x - 18x + 9$

$2x^2 - 19x - 91 = 0$

Určíme kořeny kvadratické rovnice.

$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 728}}{4} = \frac{19 \pm 33}{4} \ \Rightarrow\ x_1 = 13 \quad x_2 = -\frac{7}{2} = -3{,}5$

Provedeme zkoušku správnosti.

$L(13) = 1 - \log\sqrt{26-1} = \log 10 - \log 5 = \log 2$

$P(13) = \log\sqrt{4} = \log 2$

$L(13) = P(13)$ - *číslo $x_1 = 13$ je kořenem dané rovnice*

$L(-3{,}5) = 1 - \log\sqrt{-7-1}$ – *označený výraz není definován $\Rightarrow$ číslo $x_2 = -3{,}5$ není kořenem dané rovnice*

---

5) Určete všechna reálná čísla x, která jsou kořeny rovnice $\mathbf{x^{1+\log x} = 100}$.

Rovnici začneme řešit tak, že její levou i pravou stranu zlogaritmujeme. V dalším kroku potom uplatníme definici logaritmu a pravidla pro počítání s logaritmy.

$\log x^{1+\log x} = \log 100$

$(1 + \log x) \cdot \log x = 2$

$\log^2 x + \log x - 2 = 0$

Levou stranu kvadratické rovnice převedeme na součin kořenových činitelů.

$(\log x + 2)(\log x - 1) = 0$

$\log x_1 = -2 \ \Rightarrow\ x_1 = 10^{-2} = 0{,}01 \qquad \log x_2 = 1 \ \Rightarrow\ x_2 = 10$

Provedeme zkoušku správnosti.

$L(0{,}01) = 0{,}01^{1+\log 0{,}01} = 0{,}01^{1-2} = 0{,}01^{-1} = 100 \quad P(0{,}01) = 100$
$L(0{,}01) = P(0{,}01)$
$L(10) = 10^{1+\log 10} = 10^{1+1} = 10^2 = 100 \quad P(10) = 100 \quad L(10) = P(10)$
Obě hodnoty zkoušce vyhovují, daná rovnice má v R dva kořeny 0,01 a 10.

---

6) V R určete kořeny rovnice $\log x + \frac{1}{|\log x|} = 2$.

Protože se v rovnici objevuje výraz v absolutní hodnotě, musíme při řešení rovnice rozlišovat 2 případy.

1. $\log x > 0 \Rightarrow x \in (1;\ \infty)$

Za tohoto předpokladu budeme řešit rovnici:

$$\log x + \frac{1}{\log x} = 2$$
$$\log^2 x - 2\log x + 1 = 0$$
$$(\log x - 1)^2 = 0$$
$$\log x = 1$$
$$x = 10$$

Číslo 10 je prvkem intervalu, v němž rovnici řešíme, proto je kořenem rovnice.

2. $\log x < 0 \Rightarrow x \in (0;\ 1)$

Za tohoto předpokladu řešíme rovnici:

$$\log x - \frac{1}{\log x} = 2$$

$\log^2 x - 2\log x - 1 = 0$ *- pomocí substituce* $\log x = y$ *určíme kořeny kvadratické rovnice*

$\log x_1 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 10^{1+\sqrt{2}}$ *– tato hodnota však nepatří do intervalu* $(0;\ 1)$*, není kořenem dané rovnice*

$\log x_2 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 10^{1-\sqrt{2}}$ *- určená hodnota patří do intervalu* $(0;\ 1)$*, je kořenem dané rovnice*

---

7) V R řešte nerovnici $\log_{0,5} x < \log_{0,5} 2 + \log_{0,5}(x+1) - \log_{0,5} 3$.

Pomocí pravidel pro počítání s logaritmy a za předpokladu, že $x > 0$*, nerovnici upravíme.*

$$\log_{0,5} x < \log_{0,5} \frac{2(x+1)}{3}$$

Protože v nerovnici jsou logaritmy se základem 0,5, budou další kroky vycházet z definice klesající funkce $[\forall\, x_1, x_2 \in R^+ : x_1 < x_2 \Rightarrow \log_{0,5} x_1 > \log_{0,5} x_2\,]$.

$$x > \frac{2(x+1)}{3} \Rightarrow 3x > 2x + 2 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in (2;\ \infty)$$

---

8) V R X R řešte soustavu rovnic s neznámými x a y:

$$\mathbf{3^{\log x} + 4^{\log y} = 4}$$
$$\mathbf{3^{2\log x} - 4^{2\log y} = 8}$$

Soustavu budeme řešit za předpokladu, že x a y jsou kladná reálná čísla.
Upravíme druhou rovnici soustavy.

$$3^{\log x} + 4^{\log y} = 4$$
$$\left(3^{\log x}\right)^2 - \left(4^{\log y}\right)^2 = 8$$

Dál budeme řešit pomocí substituce $3^{log\, x} = a \quad 4^{log\, y} = b.$

$$a + b = 4$$
$$a^2 - b^2 = 8$$

Použijeme dosazovací metodu, kdy si z první rovnice si vyjádříme $a = 4 - b$, *dosadíme do druhé rovnice. Snadno vypočteme: a = 3, b = 1.*
Vrátíme se k substituci a určíme neznámé x a y.

$3^{\log x} = 3 \;\Rightarrow \log x = 1 \;\Rightarrow x = 10 \qquad 4^{\log y} = 1 \;\Rightarrow 4^{\log y} = 4^0 \;\Rightarrow \log y = 0 \;\Rightarrow y = 1$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x; y] = [10; 1]$.

Příklady k procvičování:

V R vyřešte dané rovnice:

1. $\log_3(1 - x) = \log_3(x + 16 - x^2)$ (správné řešení: x = -3)
2. $\frac{\log x}{\log x + 1} = -1$ (správné řešení: x = $\sqrt{0,1}$)
3. $\log_7\left(2x - \frac{9}{4}\right) - \log_7 x = \log_7(x - 3)$ (správné řešení: x = 4,5)
4. $10^{\frac{3}{\log x}} = 0,001$ (správné řešení: x = 0,1)
5. $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{1}{1 + \log x} = 1$ (správné řešení: $x_1 = 10^{2+\sqrt{3}}$; $x_2 = 10^{2-\sqrt{3}}$)
6. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$ (správné řešení: $x_1 = 100$; $x_2 = 0,01$)
7. $\log 2^{2\log x} - \log 2^{3\cdot\sqrt{\log x}} = 2\log 2$ (správné řešení: x = 10 000)
8. $x^{2+\log x} = 1000$ (správné řešení: $x_1 = 10$; $x_2 = 0,001$)
9. $\sqrt[5]{x^{\log_3 x}} = 243$ (správné řešení: $x_1 = 243$; $x_2 = \frac{1}{243}$)
10. $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$ (správné řešení: $x_1 = 0,01$; $x_2 = \sqrt[3]{100\,000}$)
11. $x^{3+4\log x} - 10x^6 = 0$ (správné řešení: $x_1 = 10$; $x_2 = \sqrt[4]{0,1}$)
12. $\log_7(\log_3(\log_2(\log_2 x))) = 0$ (správné řešení: x = 256)
13. $3\log^2 x - 7\log x - 6 = 0$ (správné řešení: $x_1 = 1000$; $x_2 = \sqrt[3]{0,01}$)
14. $x^{2+\log x} = 100x$ (správné řešení: $x_1 = 10$; $x_2 = 0,01$)
15. $\log_2(4x - 4) - \log_2(3 - x) = 2$ (správné řešení: x = 2)
16. $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log(x+5)} = 2$ (správné řešení: x = -4,5)

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.