Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	5. 1. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí řešit exponenciální rovnice, pro jejich řešení používá ekvivalentní i důsledkové úpravy a chápe nutnost provádění zkoušky správnosti
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Teorie:
Exponenciální rovnice jsou rovnice, kde neznámá $x \in R$ se nachází v exponentu nějaké mocniny.
Úpravami exponenciální rovnice lze dospět k rovnici ve tvaru $a^{p(x)} = a^{q(x)}, a \in (1; \infty)$, která je potom ekvivalentní s rovnicí $p(x) = q(x)$ a v jejímž řešení pokračujeme.
Exponenciální rovnici můžeme také převést na rovnici $a^{p(x)} = b$. Tuto rovnici logaritmováním upravíme na rovnici ve tvaru $p(x) = \log_a b$ a v jejím řešení pokračujeme dál.

Řešené příklady:

1) V R řešte exponenciální rovnici $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2}$.

Řešení:
Levou stranu rovnice upravíme na mocninu o základu $\frac{5}{2}$.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2(x+3)} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3(4x-1)} = \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2(x+3)+3(4x-1)} = \frac{5}{2} \Rightarrow -2x - 6 + 12x - 3 = 1 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

---

2) V R řešte exponenciální rovnici $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Řešení:
9^x na levé straně rovnice nahradíme výrazem $(3^x)^2$ a použijeme substituci $3^x = y$. Z dané rovnice získáme kvadratickou rovnici $y^2 + 2y - 3 = 0$.
Na základě vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratických rovnic rozložíme na součin kořenových činitelů a vypočteme y_1 a y_2.
$(y + 3)(y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = -3;\ y_2 = 1$
Vrátíme se zpět k substituci a vypočteme neznámou x. S hodnotou $y_1 = -3$ dále nepočítáme, protože $3^x > 0\ pro\ \forall\ x \in R$.
$y_2 = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

---

3) V R řešte rovnici $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$.

Řešení:
Nejdříve stanovíme definiční obor rovnice, neboť neznámá se vyskytuje pod odmocninou.
$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right\rangle \cup \langle\sqrt{2}; \infty)$

Zavedeme substituci $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = y$. *Protože oborem hodnot exponenciální funkce jsou kladná reálná čísla, bude y nabývat pouze kladných hodnot.*

Protože

$4^{x+\sqrt{x^2-2}} = (2^2)^{x+\sqrt{x^2-2}} = \left(2^{x+\sqrt{x^2-2}}\right)^2$ a $2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$

dostaneme z původní rovnice rovnici $y^2 - \frac{5}{2}y = 6$

Po úpravách získáme kvadratickou rovnici a určíme její kořeny y_1 *a* y_2.

$$2y^2 - 5y - 12 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = -\frac{3}{2};\; y_2 = 4$$

Do substituce dosadíme pouze 4 (viz pozn. u substituce) a získáme exponenciální rovnici:

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4 \;\Rightarrow\; 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$$

Porovnáním exponentů na obou stranách rovnice dostaneme iracionální rovnici:

$$x + \sqrt{x^2-2} = 2$$
$$\sqrt{x^2-2} = 2 - x$$
$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$$
$$4x = 6$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Získaná hodnota patří do definičního oboru rovnice, daná rovnice má tedy v množině R jediné řešení:

$$x = \frac{3}{2}$$

---

4) V R řešte rovnici $\mathbf{9 \cdot 5^{2x-4} + 4 \cdot 5^{8-2x} = 325.}$

Řešení:

Upravíme exponenty mocnin na levé straně:

$9 \cdot 5^{2(x-2)} + 4 \cdot 5^{2(4-x)} = 325$

$9 \cdot 25^{x-2} + 4 \cdot 25^{4-x} = 325$ *- při umocňování mocnin se exponenty násobí*

$9 \cdot \frac{25^x}{25^2} + 4 \cdot \frac{25^4}{25^x} = 325$ *- při dělení mocnin se exponenty odčítají*

$\frac{9}{625} \cdot y + \frac{1\,562\,500}{y} = 325$ *- zavedena substituce* $25^x = y, y > 0$

$9y^2 - 203\,125y + 976\,562\,500 = 0$

$y_1 = 15\,625$ a $y_2 = \frac{62\,500}{9}$ *- kořeny kvadratické rovnice dosadit do substituce*

$25^{x_1} = 15\,625 \;\Rightarrow\; 25^{x_1} = 5^6 \;\Rightarrow\; 5^{2x_1} = 5^6 \;\Rightarrow 2x_1 = 6 \;\Rightarrow x_1 = 3$

$25^{x_2} = \frac{62\,500}{9}$ *- nejsou mocniny o stejném základu ⇒ logaritmovat*

$$\log 25^{x_2} = \log\frac{62\,500}{9} \Rightarrow x_2 \log 25 = \log\frac{62\,500}{9} \Rightarrow x_2 = \frac{\log 62\,500 - \log 9}{\log 25} \;\Rightarrow\; x_2 \doteq 2{,}75$$

---

5) Hmotnost radioaktivní látky při rozpadu v závislosti na čase *t* lze popsat vzorcem $\boldsymbol{m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$, kde m je hmotnost v čase t, m_0 počáteční hmotnost, T tzv. poločas rozpadu, tj. doba, za kterou se m_0 zmenší na polovinu.

a) Poločas rozpadu radia A je přibližně 3 minuty. Za kolik minut od počátku rozpadu zbude z původního množství $\frac{1}{16}$?

b) Poločas rozpadu radia je 1 590 let. Za kolik let se jeho původní hmotnost zmenší na čtvrtinu?

Řešení:

a) $T = 3\ min;\ m = \frac{1}{16} m_0;\ t = ?$

Dosadíme do uvedeného vzorce a řešíme exponenciální rovnici:

$$\frac{1}{16} m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \Rightarrow 4 = \frac{t}{3} \Rightarrow t = 12$$

Za 12 minut zbude z původního množství radia A $\frac{1}{16}$.

b) $T = 1\,590\ let;\ m = \frac{1}{4} m_0;\ t = ?$

Dosadíme do uvedeného vzorce a řešíme exponenciální rovnici:

$$\frac{1}{4} m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1590}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1590}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1590}} \Rightarrow 2 = \frac{t}{1590} \Rightarrow t = 3180$$

Za 3 180 let zbude z původního množství radia čtvrtina.

---

6) V R vyřešte rovnici $\boldsymbol{3 \cdot 2^{\log x} + 8 \cdot 2^{-\log x} = 5 \cdot \left(1 + 10 \cdot \log \sqrt[5]{100}\right)}$.

Řešení:

Neznámá x je argumentem logaritmu, stanovíme nejdříve definiční obor rovnice:

$x > 0 \iff x \in (0; \infty)$

Při úpravě pravé strany rovnice uplatníme definici logaritmu a současně zavedeme substituci $2^{\log x} = y$*:*

$$3y + \frac{8}{y} = 5 \cdot \left(1 + 10 \cdot \frac{2}{5}\right)$$

Po úpravách získáme kvadratickou rovnici:

$$3y^2 - 25y + 8 = 0$$

Pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice vypočteme y_1 *a* y_2*:*

$$y_1 = 8\ a\ y_2 = \frac{1}{3}$$

Obě hodnoty postupně vrátíme do substituce a určíme kořeny x_1 *a* x_2*:*

$$2^{\log x_1} = 8 \Rightarrow 2^{\log x_1} = 2^3 \Rightarrow \log x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1\,000$$

$2^{\log x_2} = \frac{1}{3}$

Na obou stranách rovnice jsou mocniny s různými základy, proto dál pokračujeme tím, že celou rovnici zlogaritmujeme:

$\log 2^{\log x_2} = \log\frac{1}{3} \Rightarrow \log x_2 \cdot \log 2 = \log 1 - \log 3 \Rightarrow \log x_2 = \frac{\log 1 - \log 3}{\log 2}$

Pomocí kalkulačky určíme hodnotu posledního výrazu:

$\log x_2 \doteq -1{,}58 \Rightarrow x_2 = 10^{-1{,}58}$

Oba kořeny patří do definičního oboru rovnice, jsou tedy řešením zadané rovnice.

Příklady k procvičování:

V R řešte rovnice:

1. $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896$ (správné řešení: x = 3)
2. $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$ (správné řešení: x = 2)
3. $3 \cdot 4^x + 9^x \cdot 3^3 = 6 \cdot 4^{x+1} - 0{,}5 \cdot 9^{x+1}$ (správné řešení: x = -0,5)
4. $5 \cdot 9^x - \frac{8}{3} \cdot 12^x = 3^x \cdot 4^{x+1}$ (správné řešení: x = -1)
5. $81^x - 9^{x+1} = 3\log_3\frac{1}{27} + 3^{2x}$ (správné řešení: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$)
6. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} = \sqrt[3x-7]{8^{x-3}}$ (správné řešení: $x = \frac{5}{3}$)
7. $\frac{3^{x^2}}{3^{3x-6}} = 9^{2x-3}$ (správné řešení: $x_1 = 3$; $x_2 = 4$)
8. $4^{\mathrm{x}} - 6 \cdot 2^{\mathrm{x}} = 160$ (správné řešení: x = 4)
9. $3^{x-1} + 3^{\mathrm{x}-2} + 3^{\mathrm{x}-3} = 13$ (správné řešení: x = 3)
10. $\sqrt[2\mathrm{x}+3]{4^{3-\mathrm{x}}} = 256$ (správné řešení: x = -1)
11. $\left(1 - \frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}} = 2{,}25^{\frac{3}{x-5}}$ (správné řešení: $x = -\frac{1}{4}$)
12. $\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$ (správné řešení: $x_1 = 3$; $x_2 = 9$)
13. $\sqrt[x]{81} + \frac{27}{\sqrt[x]{81}} = 12$ (správné řešení: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$)
14. $5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$ (správné řešení: x = -4)
15. $\sqrt{5^{3x} + 19} = 1 + \sqrt{5^{3x} - 4}$ (správné řešení: x = 1)
16. $3 \cdot 2^x + 2^{3-x} = 10$ (správné řešení: $x_1 = 1$; $x_2 = 2 - \log_2 3$)
17. $5^x + 1 - 3 \cdot 5^x = -49$ (správné řešení: x = 2)
18. $3 \cdot 2^{2x+1} + 2 \cdot 3^{2x+3} = 3 \cdot 2^{2x+4} - 3^{2x+2}$ (správné řešení: $x = -\frac{1}{2}$)
19. $\frac{64}{25} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\frac{125}{512}\right)^{3-x}$ (správné řešení: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$)
20. $\frac{3^{x-6}}{3^{5-2x}} = \frac{\log 27}{\log 3}$ (správné řešení: x =4)

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.