INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt
ŠABLONY NA GVM
Gymnázium Velké Meziříčí
registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

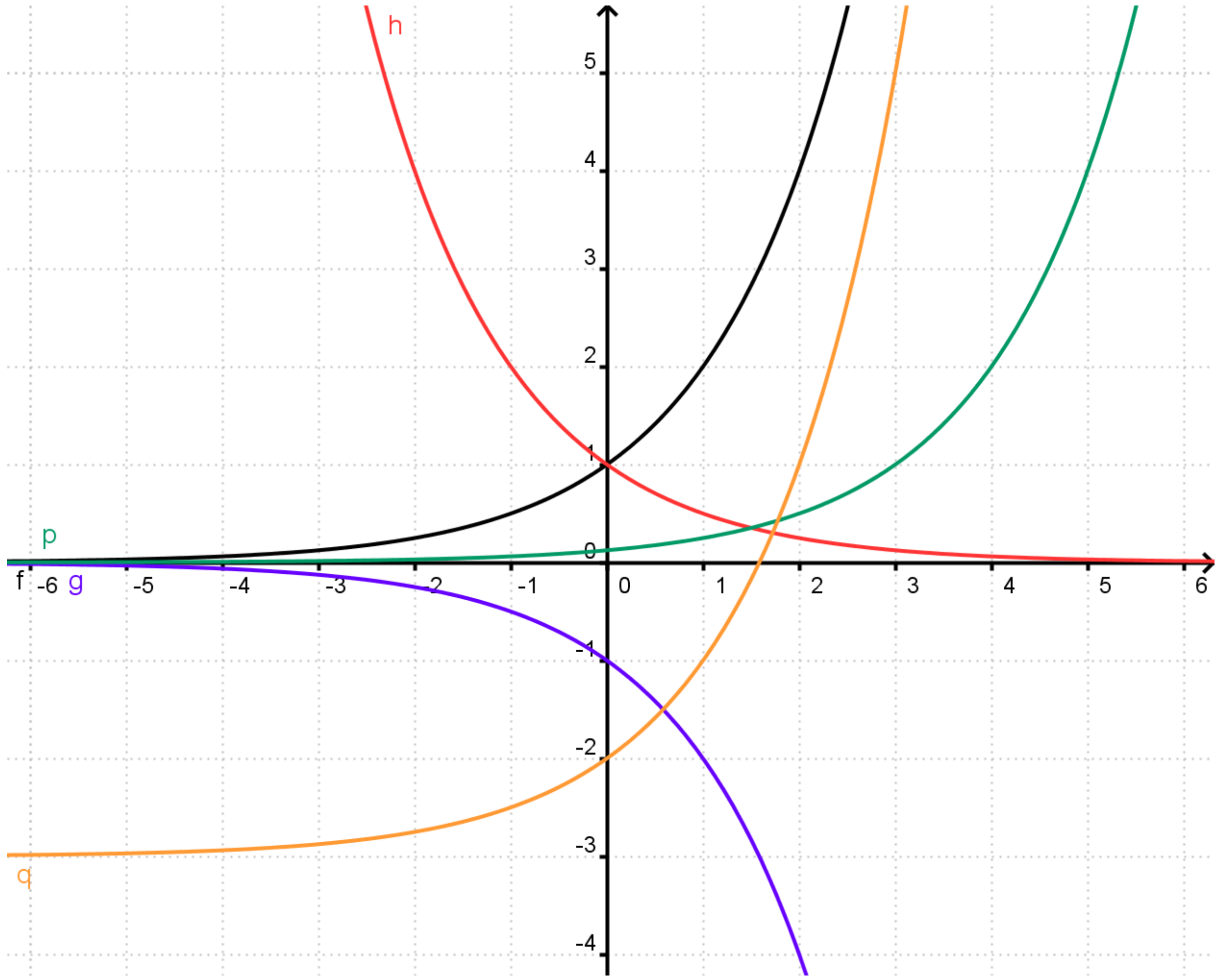
EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÁ FUNKCE

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	1. 1. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák zná definice obou funkcí, chápe log. fci jako inverzní fci k exponenciální, načrtne grafy obou fcí, umí z nich vyčíst vlastnosti, zná definici logaritmu a pravidla pro počítání s logaritmy
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:
$\boldsymbol{f}: y = 2^x$; $\boldsymbol{g}: y = -2^x$; $\boldsymbol{h}: y = 2^{-x}$; $\boldsymbol{p}: y = 2^{x-3}$; $\boldsymbol{q}: y = 2^x - 3$

Řešení:
viz obrázek



Nejdříve do soustavy souřadné zakreslíme graf funkce f (černě) a pomocí něho odvodíme grafy ostatních funkcí. Funkce f je rostoucí exponenciální funkcí.
Funkční hodnoty funkce g jsou v celém definičním oboru opačné k funkčním hodnotám funkce f, proto je graf funkce g (fialově) souměrný s grafem funkce f podle osy x. Funkce g je klesající funkcí.
Předpis funkce h upravíme: $h: y = 2^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. *Pro každé* $x \in D(h)$ *je* $h(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Graf funkce h (červeně) je potom s grafem funkce f souměrný podle osy y.
K sestrojování grafu funkce p (zeleně) musíme posunout každý bod grafu funkce f o 3 ve směru kladné poloosy x. (posun po ose x doprava)

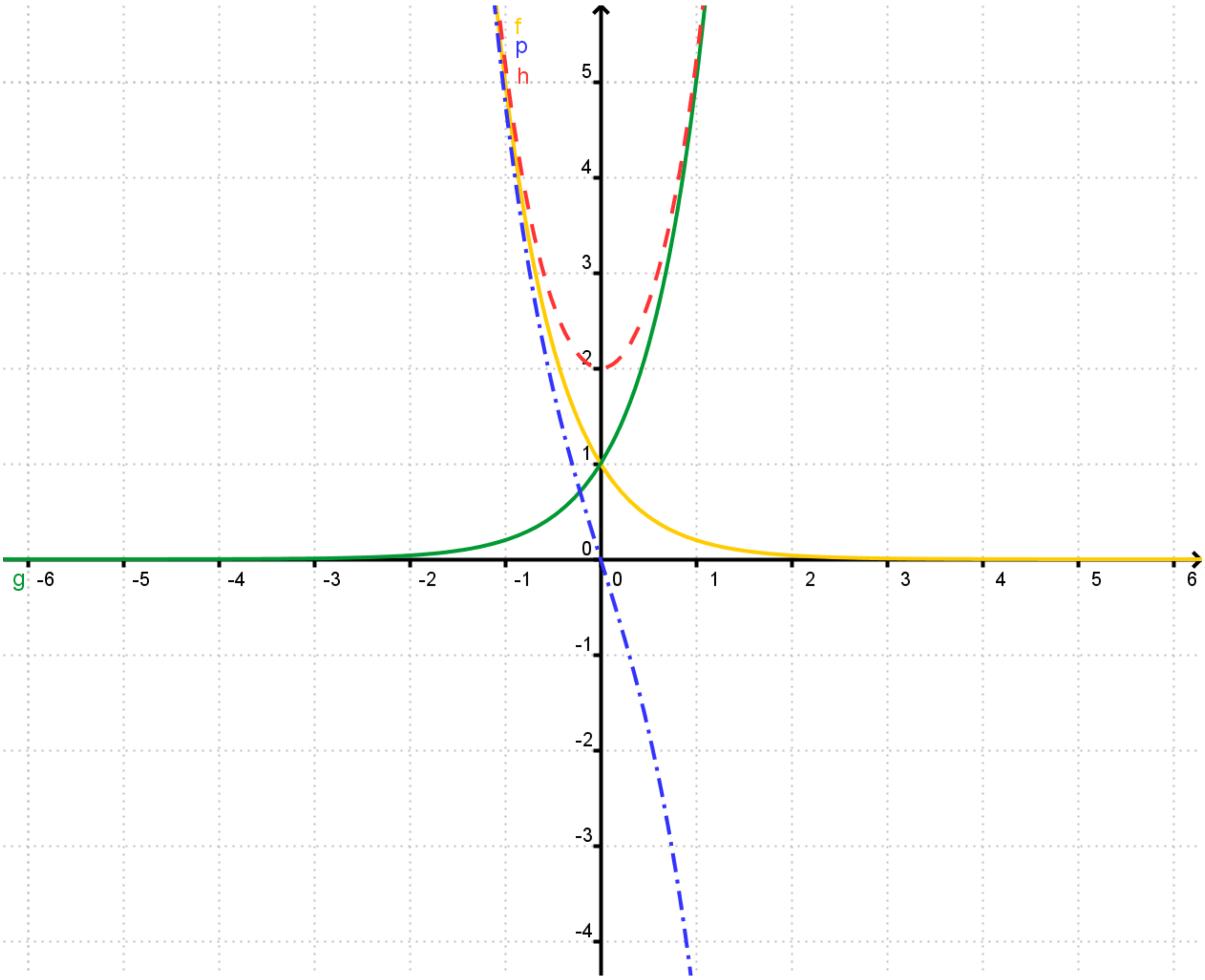
Chceme-li získat graf funkce q (oranžově), musíme každý bod grafu funkce f posunout o 3 ve směru záporné poloosy y (posun po ose y dolů); její předpis zmenšuje každou funkční hodnotu funkce f o 3.

---

2) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}2}^{\boldsymbol{x}}$; $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}2}^{-\boldsymbol{x}}$; $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}2}^{\boldsymbol{x}} + \mathbf{0{,}2}^{-\boldsymbol{x}}$; $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}2}^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{0{,}2}^{-\boldsymbol{x}}$

Řešení:
viz obrázek



Jako první do soustavy souřadné zakreslíme graf klesající exponenciální funkce f (žlutě).

Předpis funkce g nejdříve upravíme: $g: y = 0{,}2^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{10}{2}\right)^x \Rightarrow y = 5^x$. *Dostáváme předpis pro rostoucí exponenciální funkci. Její graf (zeleně) je souměrný podle osy y s grafem funkce f.*

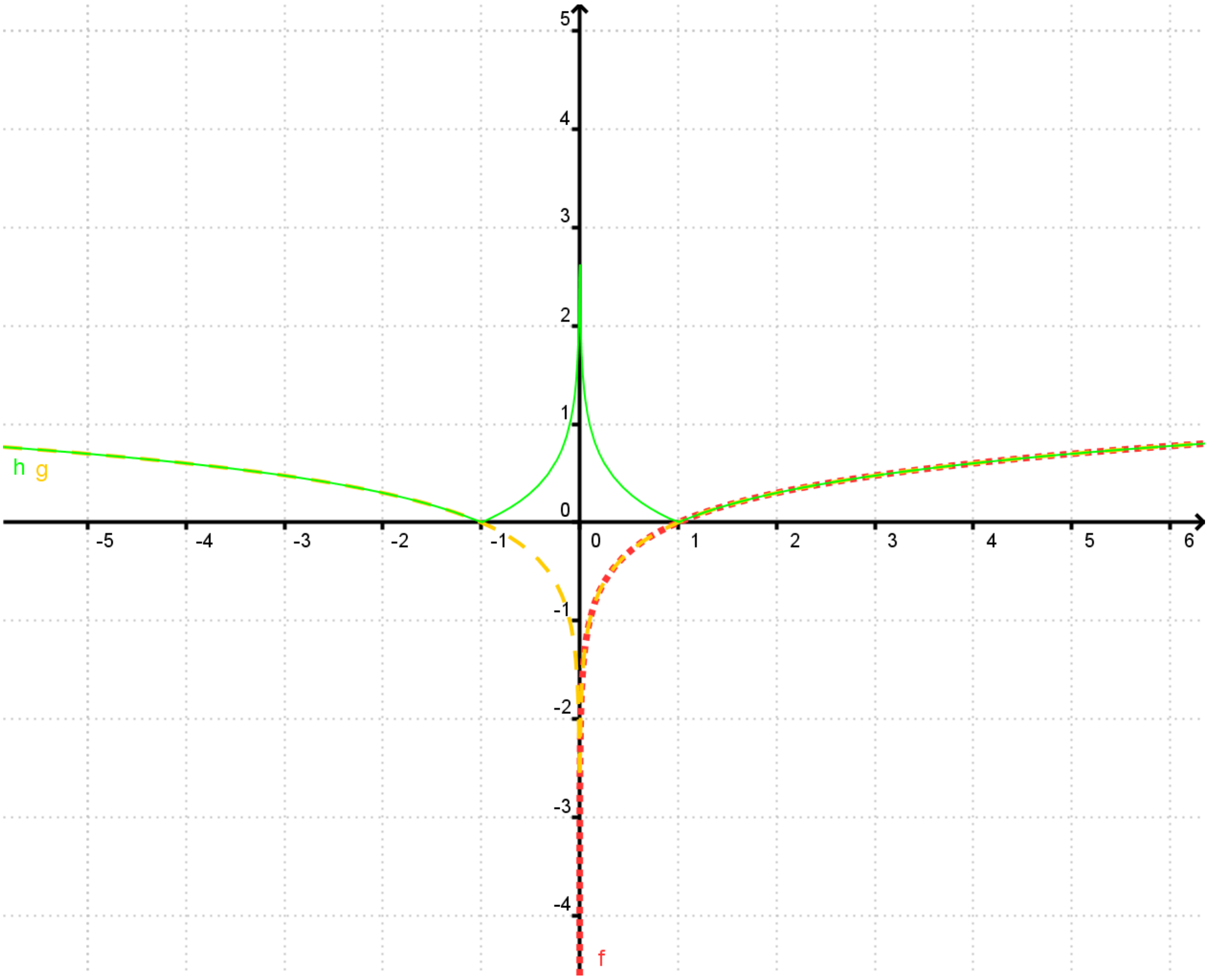
Grafy funkcí f a g využijeme k sestrojení grafu funkce h (červeně). Stačí, když si uvědomíme, že pro každé x platí: $h(x) = f(x) + g(x)$

Obdobně budeme uvažovat při sestrojování grafu funkce p (modře).

---

3) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:
$\boldsymbol{f: y = \log x\,;\; g: y = \log|x|\,;\, h: y = |\log|x||}$

Řešení:
viz obrázek



Funkce f (červeně) je rostoucí logaritmická funkce, definovaná pro kladná reálná čísla x. Funkce g je definována pro kladná a záporná reálná čísla. Její graf (žlutě) má dvě části. Jedna část (pro kladná reálná x) je totožná s grafem funkce f, druhá část (pro záporná reálná x) je souměrná podle osy y s grafem funkce f.
Definičním oborem funkce h jsou všechna reálná čísla různá od nuly. Při sestrojování grafu funkce h (zeleně) uplatníme definici absolutní hodnoty na funkční hodnoty funkce g:
$g(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) = g(x); g(x) < 0 \Rightarrow h(x) = -g(x)$

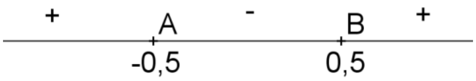
---

4) Určete, pro které hodnoty parametru *a* je funkce $\boldsymbol{f: y = \left(\frac{2a+1}{2a-1}\right)^x}$ **klesající.**

Řešení:
Aby funkce f byla klesající, musí platit: $\frac{2a+1}{2a-1} > 0 \wedge \frac{2a+1}{2a-1} < 1$. *Musíme tedy řešit dvě nerovnice v podílovém tvaru.*

$\dfrac{2a+1}{2a-1} > 0$ 1

Nulové body z čitatele i jmenovatele zlomku nerovnice 1 zakreslíme na číselnou osu a určíme interval, který je řešením nerovnice 1.



$K_1 = (-\infty;\ -0{,}5) \cup\ (0{,}5;\ \infty)$

$\dfrac{2a+1}{2a-1} < 1$ 2

V nerovnici 2 vynulujeme pravou stranu

$\Rightarrow\ \dfrac{2}{2a-1} < 0\ \Rightarrow 2a-1 < 0\ \Rightarrow a < 0{,}5$

$K_2 = (-\infty; 0{,}5)$

Nerovnice 1, 2 platí současně, proto určíme průnik množin K_1 a K_2, abychom získali konečné řešení.

$K = (-\infty; -0{,}5)$

Bude-li parametr a z množiny K, bude zadaná funkce f klesající.

---

5) Určete podmínku pro $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^+ - \{\mathbf{1}\}$, jsou-li následující vztahy pravdivé:

a) $\boldsymbol{a^{\frac{3}{7}} < a^{\frac{7}{4}}}$ **b) $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{0,3} > \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{3}$**

Řešení:

a) Protože $\frac{7}{4} > \frac{3}{7}$ a hodnota mocniny s větším exponentem má být větší než hodnota mocniny s menším exponentem, jedná se o rostoucí exponenciální funkce. Exponenciální funkce je rostoucí právě tehdy, když $a \in (1;\ \infty)$.

b) Protože $3 > 0{,}3$ a hodnota logaritmu s větším argumentem má být menší než logaritmus menšího argumentu, jedná se o klesající logaritmickou funkci. Logaritmická funkce je klesající právě tehdy, když $a \in (0; 1)$.

---

6) Určete definiční obor funkce:

a) $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{ln}(\mathbf{3}-\boldsymbol{x})} + \sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{4}}$ **b) $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{3}^{\sqrt{\mathbf{5}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$**

Řešení:

a) Ve funkci f se vyskytuje zlomek, přirozený logaritmus a odmocnina. Toto vše musíme zohlednit při stanovování definičního oboru.

Ve jmenovateli zlomku nesmí být 0 $\Rightarrow$

$\ln(3-x) \neq 0\ \Rightarrow 3-x \neq e^0\ \Rightarrow 3-x \neq 1\ \Rightarrow x \neq 2$

Musí být definován přirozený logaritmus $\Rightarrow$

$3 - x > 0 \;\Rightarrow x < 3$

Musí být definována odmocnina $\Rightarrow$

$x + 4 \geq 0 \;\Rightarrow x \geq -4$

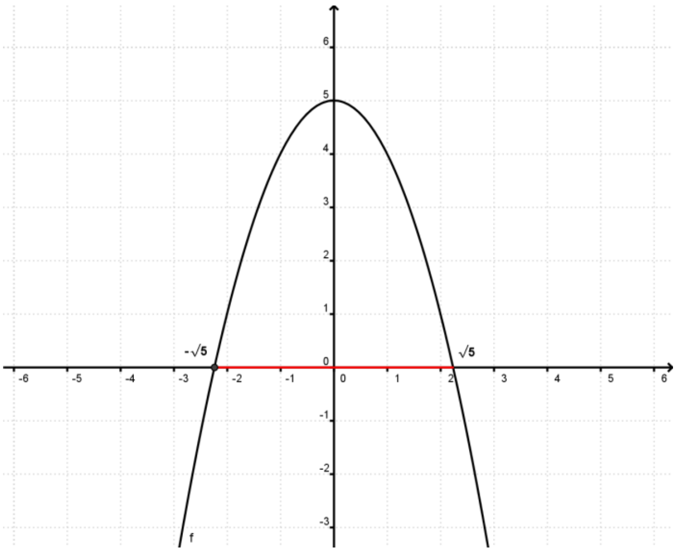
Všechny tři vyznačené podmínky musí platit současně, stanovíme tedy jejich průnik a ten bude definičním oborem funkce f.

$D(f) = \langle -4;\; 2) \cup (2; 3)$

b) Obecně je exponenciální funkce definovaná pro všechna reálná čísla, ale v našem případě máme v exponentu odmocninu a ta je definovaná pro nezáporná čísla $\Rightarrow$

$5 - x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) \geq 0$

Metodou nulových bodů nebo pomocí grafu kvadratické funkce určíme řešení nerovnice a tím i definiční obor funkce g.



$D(g) = \left(-\sqrt{5};\; \sqrt{5}\right)$

---

7) Vypočtěte:

a) $\boldsymbol{a = \log_4 \frac{1}{256} - \log 10 + \log_3 243}$ **b)** $\boldsymbol{b = 7^{2+\log_7 3}}$

Řešení:

a) Uplatníme definici logaritmu a pravidla pro počítání s logaritmy:

$$a = log_4 \frac{1}{256} - log\ 10 + log_3\ 243 =$$

$$= \log_4(4^{-4}) - 1 + \log_3 3^5 = -4\log_4 4 - 1 + 5\log_3 3 = -4 \cdot 1 - 1 + 5 \cdot 1 = 0$$

b) Uplatníme pravidla pro počítání s mocninami a definici logaritmu:

$b = 7^{2+\log_7 3} = 7^2 \cdot 7^{\log_7 3} = 49 \cdot 3 = 147$

---

8) Je dána funkce $f: y = \sqrt{1 - \log_2(2^{x+1} - 1)}$.

a) Určete definiční obor funkce f.

b) K funkci f určete inverzní funkci.

Řešení:

a) Rovnice funkce f má smysl, pokud je definována odmocnina a zároveň logaritmus. Pro stanovení definičního oboru platí současně dvě podmínky:

① $1 - \log_2(2^{x+1} - 1) \geq 0$

② $2^{x+1} - 1 > 0$

Vyřešíme nejdříve první nerovnici:

$1 - \log_2(2^{x+1} - 1) \geq 0$

$\log_2(2^{x+1} - 1) \leq 1$

$\log_2(2^{x+1} - 1) \leq \log_2 2$

$2^{x+1} - 1 \leq 2 \;\Rightarrow\; 2^{x+1} \leq 3$

U poslední nerovnosti jsou na obou stranách mocniny s různými základy, proto dál pokračujeme logaritmováním dané nerovnosti:

$\log_2 2^{x+1} \leq \log_2 3 \;\Rightarrow\; (x+1)\cdot\log_2 2 \leq \log_2 3 \;\Rightarrow x + 1 \leq \log_2 3 \;\Rightarrow x \leq \log_2 3 - 1$

Vyřešíme druhou nerovnost:

$2^{x+1} - 1 > 0 \;\Rightarrow\; 2^{x+1} > 1 \;\Rightarrow\; 2^{x+1} > 2^0 \;\Rightarrow x + 1 > 0 \;\Rightarrow x > -1$

Obě žlutě označené podmínky platí současně, proto jejich průnikem získáme definiční obor funkce f.

$D(f) = (-1;\, \log_2 3 - 1\rangle$

b) Určíme rovnici inverzní funkce. Z rovnice funkce f vyjádříme nezávisle proměnnou x.

$y = \sqrt{1 - \log_2(2^{x+1} - 1)} \;\Rightarrow\; y^2 = 1 - \log_2(2^{x+1} - 1) \;\Rightarrow\; \log_2(2^{x+1} - 1) = 1 - y^2$

Dle definice logaritmu platí:

$2^{x+1} - 1 = 2^{1-y^2} \;\Rightarrow\; 2^{x+1} = 2^{1-y^2} + 1$

Poslední rovnost zlogaritmujeme, upravujeme pomocí definice logaritmu a pravidel pro počítání s logaritmy:

$\log_2 2^{x+1} = \log_2\left(2^{1-y^2} + 1\right) \;\Rightarrow x + 1 = \log_2\left(2^{1-y^2} + 1\right) \;\Rightarrow x = \log_2\left(2^{1-y^2} + 1\right) - 1$

Nyní provedeme záměnu $x \leftrightarrow y$ a zapíšeme rovnici inverzní funkce:

$f^{-1}: y = \log_2\left(2^{1-x^2} + 1\right) - 1$

Příklady k procvičování:

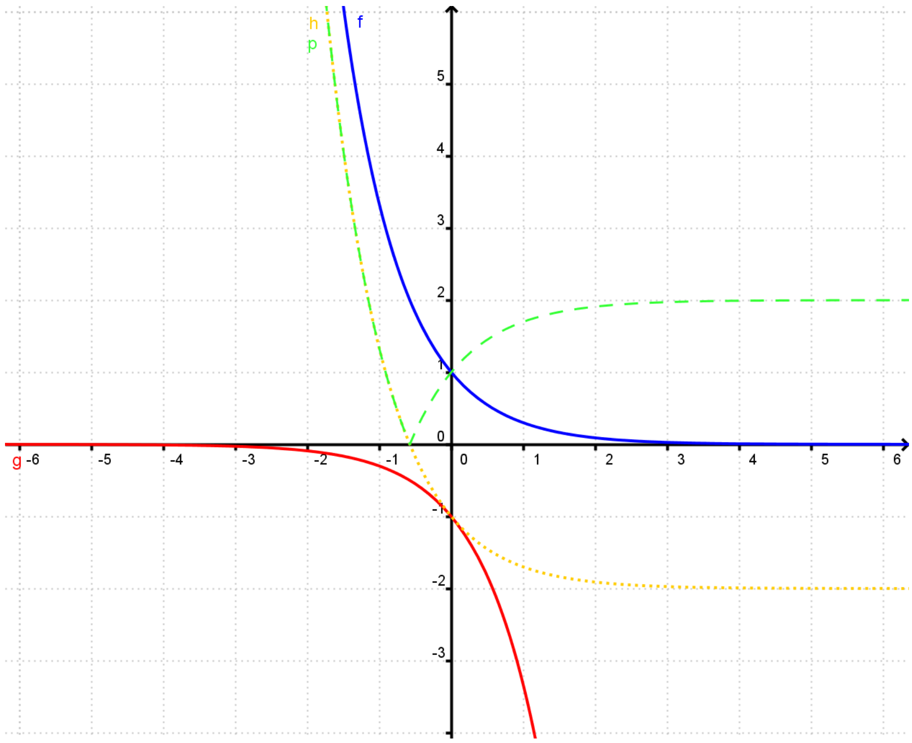
1) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:

a) $f: y = 0{,}3^{x};\ g: y = -0{,}3^{-x}; h: y = 0{,}3^{x} - 2; p: y = |0{,}3^{x} - 2|$

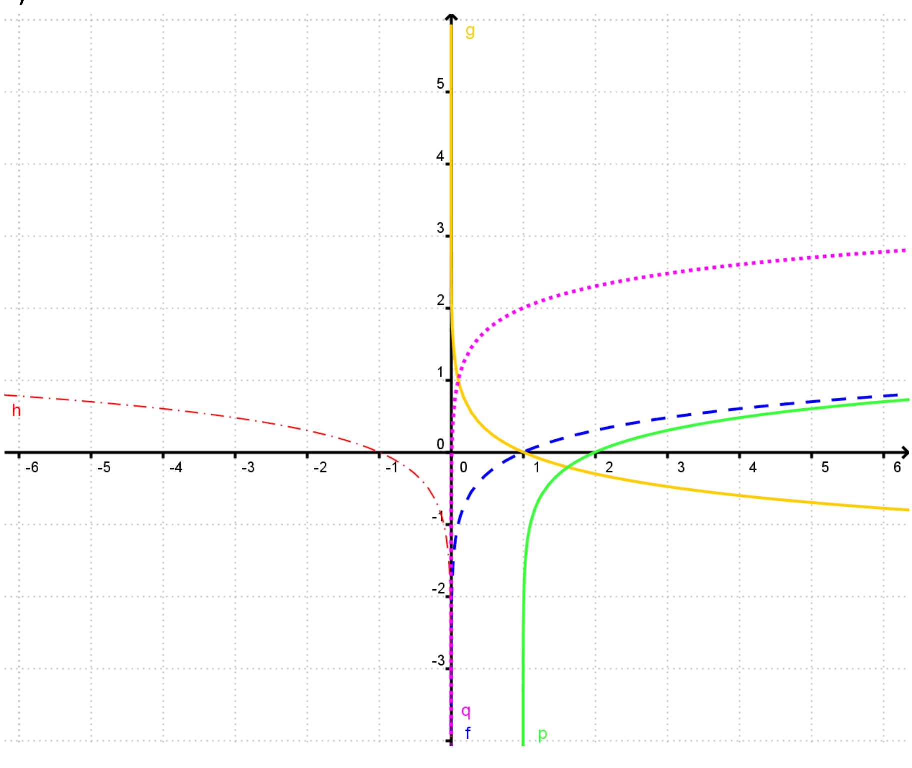
b) $f: y = \log x\,;\ g: y = -\log x\,;\ h: y = \log(-x);\ p: y = \log(x-1);\ q: y = \log x + 2$

správné řešení:

a)



b)



2) Rozhodněte o pravdivosti výroků:

a) $\log_{0,5} 7 > \log_{0,5} 8$ b) $\log_5 7 \geq \log_5 8$

c) $\log_5 7 < \log_{0,2} 8$ d) $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{5}{8}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{8}{5}}$

e) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} > \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$ f) $\left(\sqrt{3}\right)^{-3} < \left(\sqrt{3}\right)^{-4}$

(správné řešení: pravdivé výroky a, e)

3) Určete, pro které hodnoty parametru *a* je funkce $f: y = \left(\frac{a}{a+2}\right)^{x}$ rostoucí.

(správné řešení: $(-\infty;\ -2)$)

4) Určete definiční obor funkce:

a) $f: y = 5^{\sqrt{x^2-4}}$ b) $g: y = \log|x-9|$

c) $h: y = \ln\frac{3-x}{x+3}$ d) $m: y = \sqrt{\log_2 x - 1}$

(správné řešení: a) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$; b) $(-\infty; 9) \cup (9; \infty)$; c) $(-3; 3)$; d) $\langle 2; \infty)$)

5) Vypočítejte hodnotu výrazu:

a) $\frac{\log_2 16 - 3^{\log_4 4}}{\log 0{,}1} =$ b) $\log 0{,}001 \cdot \log_3 9 - \log_3 \frac{1}{9} =$

(správné řešení: a) -1; b) -4)

6) Daná čísla porovnejte s číslem 1:

$\left(\frac{5}{2}\right)^{3};\ (0{,}26)^{0{,}25};\ \left(\frac{3}{4}\right)^{-3{,}8};\ 1{,}57^{0};\ \left(\frac{12}{11}\right)^{-5{,}7};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}};\ \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{6}};\ 0{,}7^{-\frac{2}{3}};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-5{,}7}$

(správné řešení: menší než 1: 2., 5., 6.; rovna 1: 4.; větší než 1: 1., 3., 7., 8., 9.)

7) Vypočítejte *x*, jestliže platí:

a) $\log_{0,5} x = 4$ b) $\log_x 125 = -3$

c) $\log_4 \frac{1}{64} = x$ d) $\log_{0,5} x = \log_{0,5} 4 + 2\log_{0,5} 7 - 0{,}5\log_{0,5} 1$

(správné řešení: a) $\frac{1}{16} = 0{,}0625$; b) $\frac{1}{5} = 0{,}2$; c) -3; d) 196)

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.