INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

INVERZNÍ FUNKCE A SLOŽENÉ FUNKCE

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	6. 12. 2013
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák chápe pojem inverzní funkce, umí rozhodnout, ke kterým funkcím existuje inverzní funkce, k dané funkci umí zjistit předpis inverzní funkce a načrtnout její graf, rozumí pojmu složená funkce, dokáže u složené funkce určit vnější a vnitřní funkci, umí určit předpis pro složenou funkci a zjistit její definiční odbor.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1. Rozhodněte, ke kterým z následujících funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, a svoje tvrzení zdůvodněte:
   a. $f_1 : y = 3x + 4$
   b. $f_2 : y = 2^{x-1}$
   c. $f_3 : y = \log_{\frac{1}{2}} x$
   d. $f_4 : y = x^2 + 2x + 3$
   e. $f_5 : y = \sqrt{x}$
   f. $f_6 : y = |x+1| - 2$

   Řešení:

   Nutnou podmínkou pro existenci inverzní funkce je, aby původní funkce byla prostá.

   a. $f_1 : y = 3x + 4$

      - funkce lineární je prostá v množině reálných čísel, tedy v celém definičním oboru $\Rightarrow$ existuje k ní inverzní funkce.

   b. $f_2 : y = 2^{x-1}$

      - funkce exponenciální je prostá v množině reálných čísel, tedy v celém definičním oboru $\Rightarrow$ existuje k ní inverzní funkce.

   c. $f_3 : y = \log_{\frac{1}{2}} x$

      - funkce logaritmická je prostá v množině kladných reálných čísel, tedy v celém definičním oboru $\Rightarrow$ existuje k ní inverzní funkce.

   d. $f_4 : y = x^2 + 2x + 3$

      funkce kvadratická není prostá v množině reálných čísel (v jejím definičním oboru) $\Rightarrow$ neexistuje k ní v množině reálných čísel inverzní funkce.

   e. $f_5 : y = \sqrt{x}$

      - tato funkce je prostá v množině všech nezáporných celých čísel, tedy v celém definičním oboru $\Rightarrow$ existuje k ní inverzní funkce.

2. U daných funkcí určete definiční obor, nakreslete graf, určete obor funkčních hodnot a monotónnost. Rozhodněte, zda existuje funkce inverzní. Pokud ano, do téže soustavy souřadnic načrtněte její graf a dále určete její definiční obor, obor funkčních hodnot a funkční předpis.

   a. $f : y = 2x + 1$

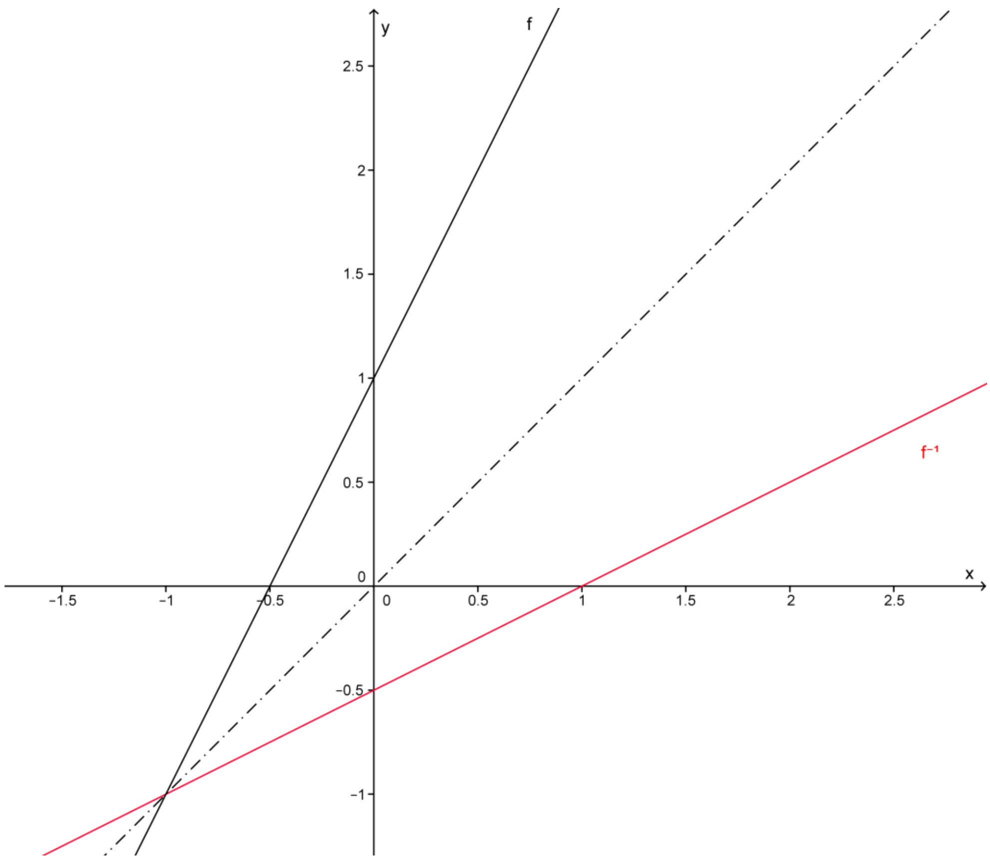
      D_f = **R**

      H_f = **R**

      Funkce f je rostoucí.

      Funkce f je prostá v celém definičním oboru, proto k ní existuje inverzní funkce.

      Graf na obr. 1



Obr. 1

Inverzní funkce f^{-1}:

$D_{f^{-1}}$ = **R** = H_f

$H_{f^{-1}}$ = **R** = D_f

f^{-1} je rostoucí (stejně jako původní funkce).

Předpis inverzní funkce získáme záměnou x a y v předpisu původní funkce a vyjádřením y z této rovnice.

$f : y = 2x + 1$

$f^{-1} : x = 2y + 1$

$-2y = -x + 1$

$$\underline{\underline{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}}$$

b. $g: y = \frac{1}{x} + 1$

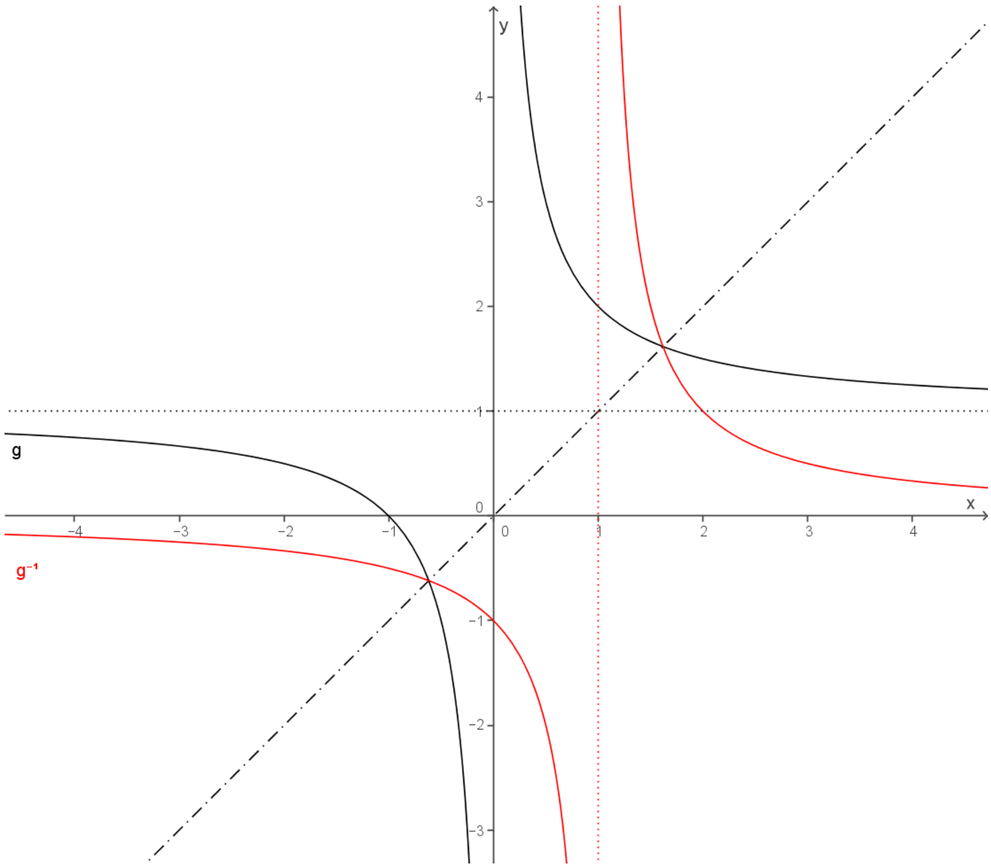
$D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$H_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

Funkce g je klesající v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

Funkce g je prostá v celém definičním oboru, proto k ní existuje inverzní funkce.

Graf viz obr. 2



Obr. 2

Inverzní funkce g^{-1}:

$D_{g^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{1\} = H_g$

$H_{g^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{0\} = D_g$

g^{-1} je klesající (stejně jako původní funkce), avšak v intervalech $(-\infty; 1)$ a $(1; \infty)$.

Předpis inverzní funkce získáme záměnou x a y v rovnici původní funkce a vyjádřením y:

$$g: y = \frac{1}{x} + 1$$

$$g^{-1}: x = \frac{1}{y} + 1$$

$$\frac{1}{y} = x - 1$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{x-1}}}$$

c. $h: y = x^3$

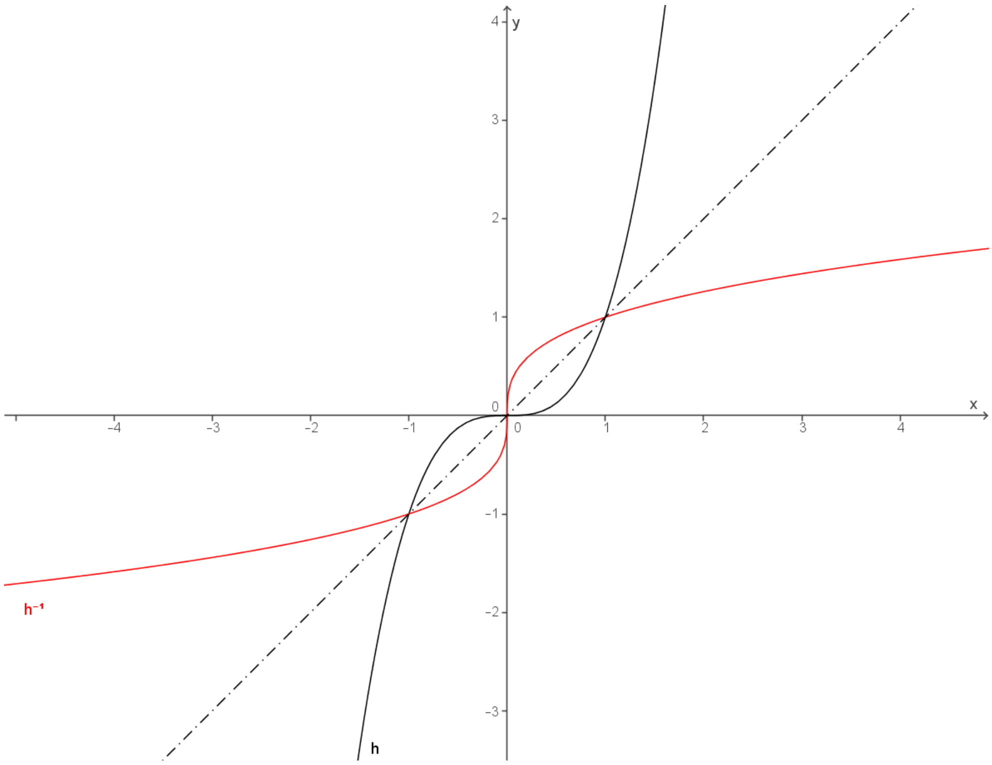
$D_h = \mathbf{R}$

$H_h = \mathbf{R}$

Funkce h je rostoucí.

Funkce h je prostá v celém definičním oboru, proto k ní existuje inverzní funkce.

Graf viz obr. 3



Obr. 3

Inverzní funkce h^{-1}:

$D_{h^{-1}} = \mathbf{R} = H_h$

$H_{h^{-1}} = \mathbf{R} = D_h$

h^{-1} je rostoucí (stejně jako původní funkce)

Předpis inverzní funkce získáme záměnou x a y v rovnici původní funkce a vyjádřením y:

$h: y = x^3$

$h^{-1}: x = y^3$

$\underline{\underline{y = \sqrt[3]{x}}}$

d. $k: y = x^{-6} \wedge x \in (0; \infty)$

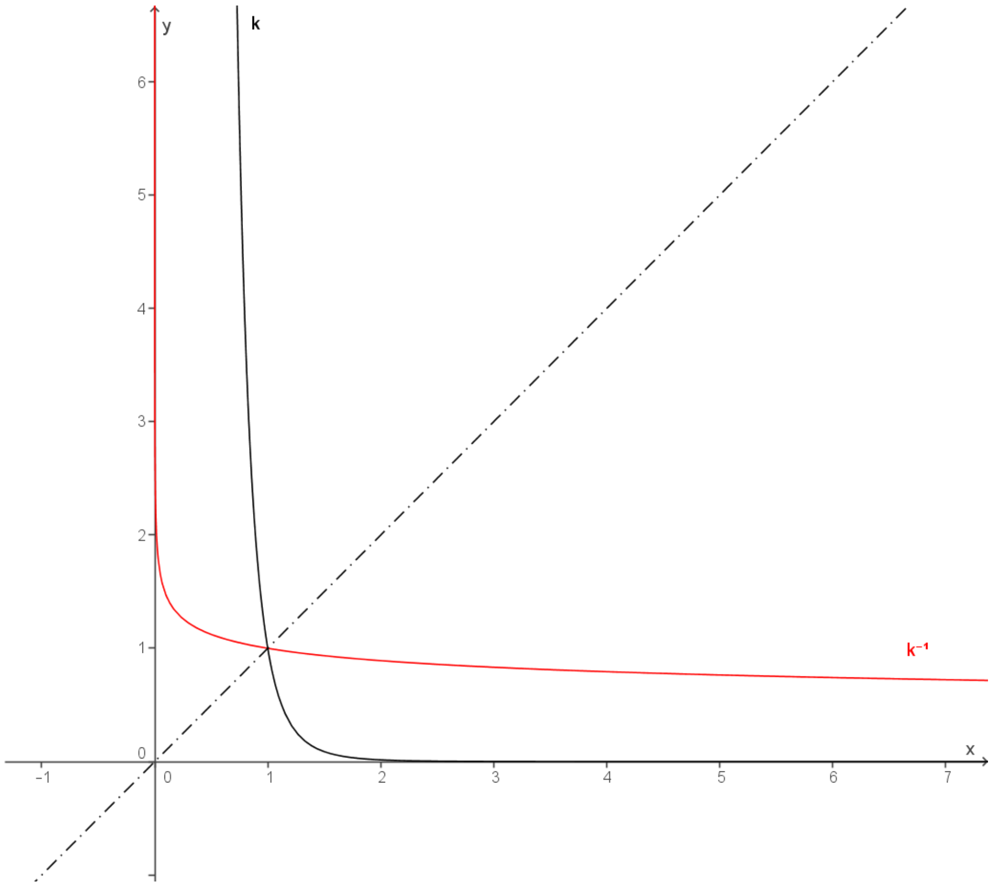
$D_k = (0; \infty)$

$H_k = (0; \infty)$

Funkce k je klesající.

Funkce k je prostá v celém definičním oboru, proto k ní existuje inverzní funkce.

Graf viz obr. 4



Obr. 4

Inverzní funkce k^{-1}:

$D_{k^{-1}} = (0;\infty)$ = H_k

$H_{k^{-1}} = (0;\infty)$ = D_k

k^{-1} je klesající (stejně jako původní funkce)

Předpis inverzní funkce získáme záměnou x a y v rovnici původní funkce a vyjádřením y:

$k: y = x^{-6}$

$k^{-1}: x = y^{-6}$

$$x = \frac{1}{y^6}$$

$$y^6 = \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{y = x^{-\frac{1}{6}}}}$$

e. $l: y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$

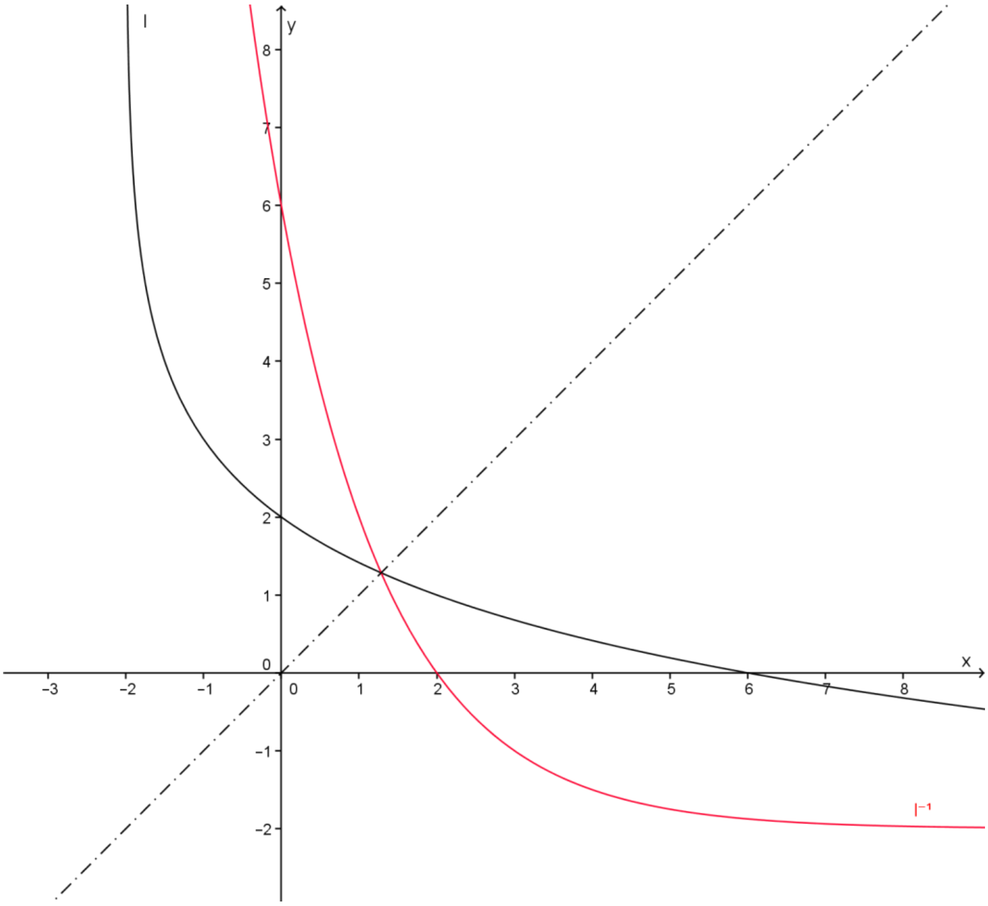
$D_l = (-2;\infty)$

$H_l = \mathbf{R}$

Funkce l je klesající.

Funkce l je prostá v celém definičním oboru, proto k ní existuje inverzní funkce.

Graf viz obr. 5



Obr. 5

Inverzní funkce l^{-1}:

$D_{l^{-1}}$ = **R** = H_l

$H_{l^{-1}} = (-2;\infty) = D_l$

l^{-1} je klesající (stejně jako původní funkce)

Předpis inverzní funkce získáme záměnou x a y v rovnici původní funkce a vyjádřením y:

$$l : y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$$

$$l^{-1} : x = \log_{\frac{1}{2}}(y+2)+3$$

$$x-3 = \log_{\frac{1}{2}}(y+2)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = y+2$$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 2}}$$

3. Jsou dány dvojice funkcí:

   a. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = 3x+2$

b. $f(x) = 2 - x,\ g(x) = \sqrt{x}$

Najděte složené funkce $h = g \circ f$ a $k = f \circ g$ a určete jejich definiční obory.

Řešení:

a. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = 3x + 2$

$$h = g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{1}{x}\right) + 2 = \frac{3}{x} + 2$$

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\},\ D_g = \mathbf{R} \Rightarrow D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$$k = f \circ g = f(g(x)) = f(3x+2) = \frac{1}{3x+2}$$

$$D_f = \mathbf{R},\ D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow D_k = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

b. $f(x) = 2 - x,\ g(x) = \sqrt{x}$

$$h = g \circ f = g(f(x)) = g(2 - x) = \sqrt{2 - x}$$

$$D_f = \mathbf{R},\ D_g = \langle 0; \infty) \Rightarrow 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_h = (-\infty; 2\rangle$$

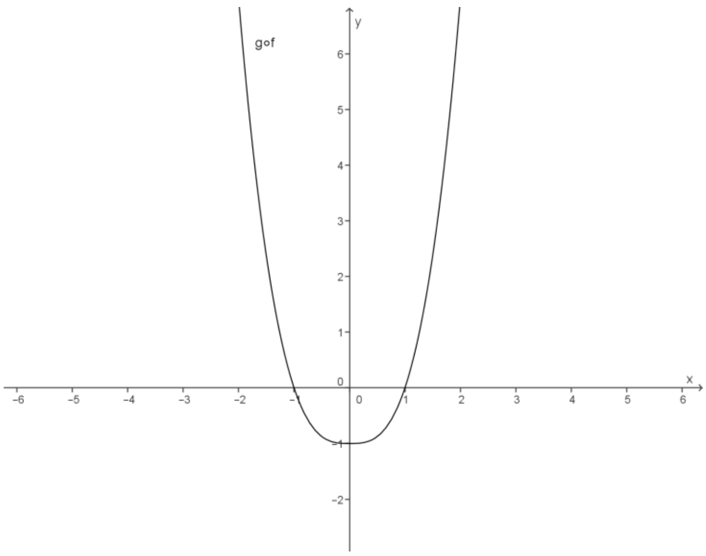
$$k = f \circ g = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2 - \sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbf{R},\ D_g = \langle 0; \infty) \Rightarrow D_k = \langle 0; \infty)$$

4. Jsou dány funkce: $f(x) = |x|,\ g(x) = x^3 - 1$. Napište předpisy složených funkcí $h = g \circ f$ a $k = f \circ g$ a načrtněte jejich grafy.

$$h = g \circ f = g(f(x)) = g(|x|) = |x|^3 - 1$$

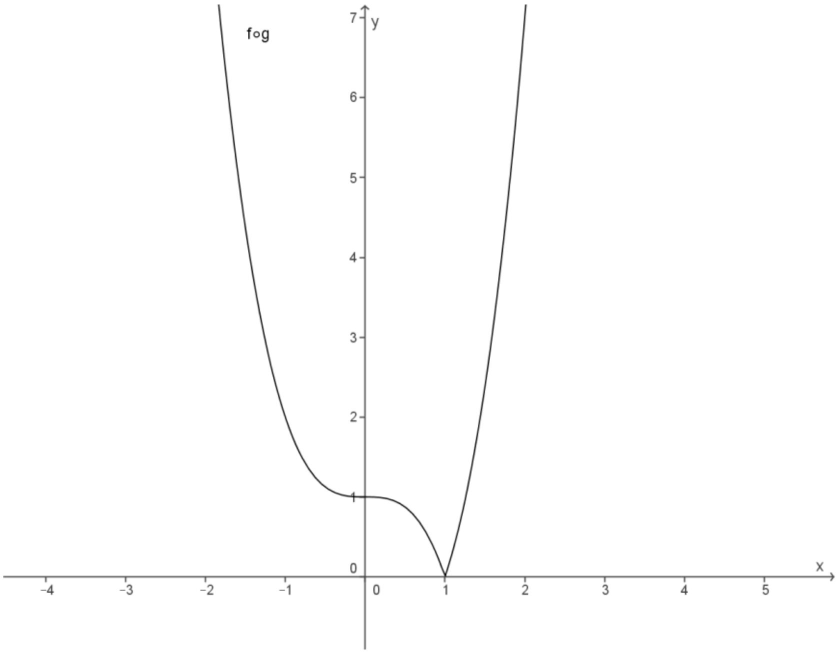
Graf viz obr. 6



Obr. 6

$k = f \circ g = f(g(x)) = f\left(x^3 - 1\right) = \left|x^3 - 1\right|$

Graf viz obr. 7



Obr. 7

4. U daných složených funkcí určete funkci vnější a funkci vnitřní:
   a. $y = 3\sqrt{x} + 4$
   b. $y = \log x^2$
   c. $y = \log^2 x$

a. Funkce $y = 3\sqrt{x} + 4$ je složena z funkcí $f(x) = 3x + 4$ a $g(x) = \sqrt{x}$ jako $h = f \circ g$ (tedy $g(x) = \sqrt{x}$ je vnitřní funkce a $f(x) = 3x + 4$ je vnější funkce).

b. Funkce $y = \log x^2$ složena z funkcí $f(x) = \log x$ a $g(x) = x^2$ jako $h = f \circ g$ (tedy $g(x) = x^2$ je vnitřní funkce a $f(x) = \log x$ je vnější funkce).

c. Funkce $y = \log^2 x$ je složena z funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \log x$ jako $h = f \circ g$ (tedy $g(x) = \log x$ je vnitřní funkce a $f(x) = x^2$ je vnější funkce).

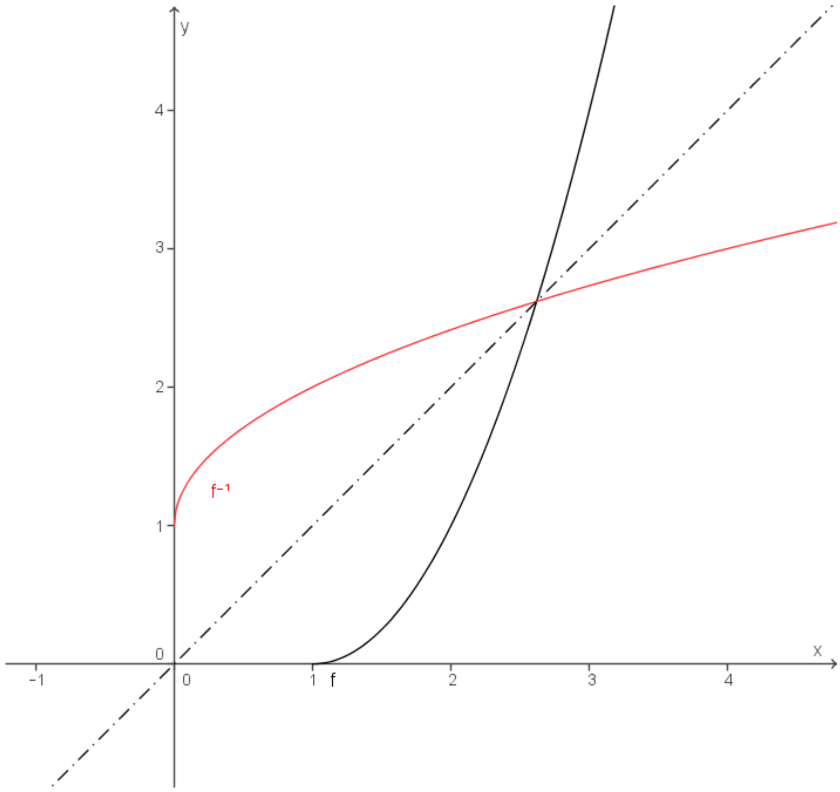
Příklady k procvičování:

1. Rozhodněte, ke kterým z následujících funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, a svoje tvrzení zdůvodněte:
   a. $y = \frac{x}{3} - 4$
   b. $y = |x+5|$
   c. $y = 5x^2; \langle 0; \infty)$
   d. $y = x^2 - 2x \wedge x \in (-\infty; 2\rangle$
   e. $y = \log_2 x + 3$
   f. $y = 4$

[a. existuje, b. neexistuje, c. existuje, d. neexistuje, e. existuje , f. neexistuje]

2. U daných funkcí určete definiční obor, nakreslete graf a určete obor funkčních hodnot. Rozhodněte, zda existuje funkce inverzní. Pokud ano, do téže soustavy souřadnic načrtněte její graf a určete její definiční obor, obor funkčních hodnot a funkční předpis.
   a. $f: y = (x-1)^2; \langle 1; \infty)$

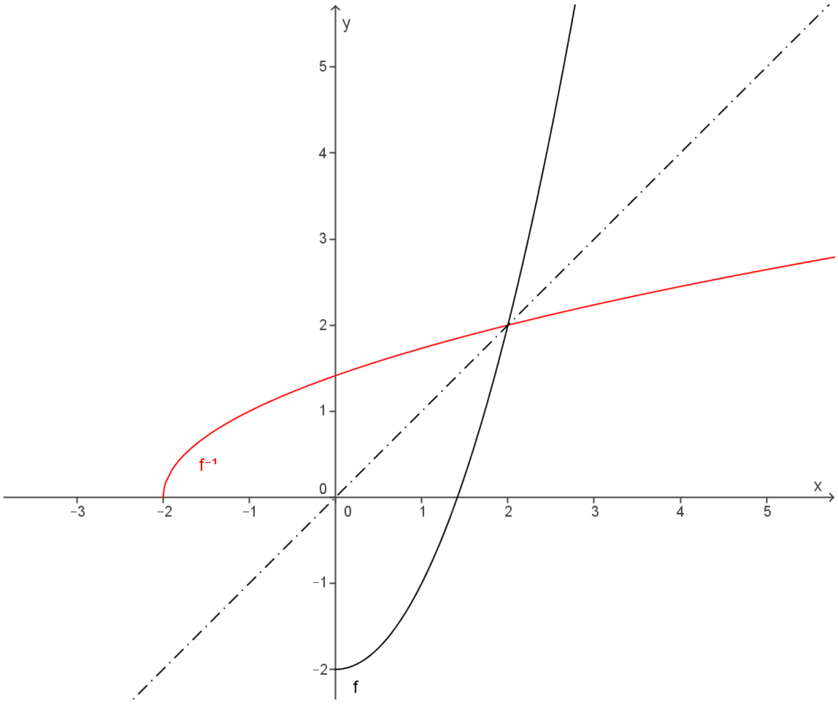
[$D_f = \langle 1; \infty) = H_{f^{-1}}; H_f = \langle 0; \infty) = D_{f^{-1}}$, existuje, graf na obr. 8, $f^{-1}: y = \sqrt{x} + 1$]



Obr. 8

   b. $f: y = x^2 - 2; \langle 0; \infty)$

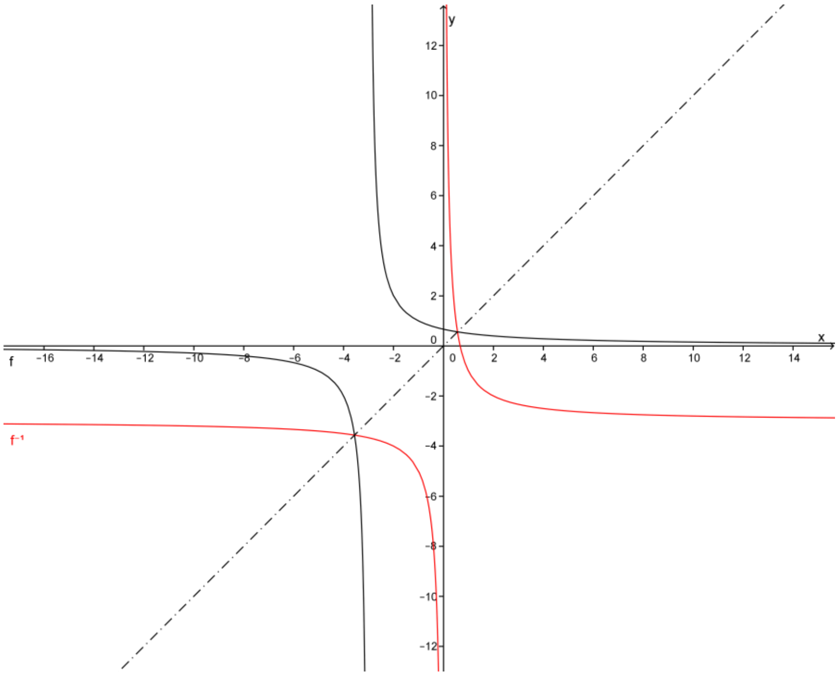
[$D_f = \langle 0;\infty) = H_{f^{-1}}; H_f = \langle -2;\infty) = D_{f^{-1}}$, existuje, graf na obr. 9, $f^{-1}:\ y = \sqrt{x+2}$]



Obr. 9

c. $f: y = \dfrac{2}{x+3}$

[$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\} = H_{f^{-1}}; H_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, existuje, graf na obr. 10, $f^{-1}:\ y = \dfrac{2}{x} - 3$]



Obr. 10

3. Najdi funkce, ze kterých jsou složeny následující funkce a určete funkci vnější a funkci vnitřní:

   a. $h_1 : y = (3x+5)^3$

   b. $h_2 : y = \dfrac{3}{x-2}$

   c. $h_3 : y = \dfrac{1}{x^2 + x}$

   d. $h_4 : y = \sin\dfrac{1}{x}$

   e. $h_5 : y = \log^2 x - 2\log x$

[a. $f(x) = x^3$ a $g(x) = 3x+5$ jako $h = f \circ g$

b. $f(x) = \dfrac{3}{x}$ a $g(x) = x-2$ jako $h = f \circ g$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a $g(x) = x^2 + x$ jako $h = f \circ g$

d. $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \dfrac{1}{x}$ jako $h = f \circ g$

e. $f(x) = x^2 - 2x$ a $g(x) = \log x$ jako $h = f \circ g$]

Použité zdroje a literatura:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.
BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.
KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
ODVÁRKO, Oldřich A KOL. Matematika pro II. Ročník gymnázií. 1. Vyd. Praha: SPN, 1985.
PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.