



Projekt
ŠABLONY NA GVM
Gymnázium Velké Meziříčí
registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

FUNKCE NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST A LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE

Autor	Petr Vrána
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	10. dubna 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá funkci nepřímá úměrnost a lineární lomená funkce a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Příklad 1

3 dělníci vykonali určitou práci za 10 dní. Za kolik dní by ji vykonalo 5 dělníků? (Předpokládáme, že všichni dělníci pracovali se stejným výkonem.)

Řešení

x dělníků vykoná práci za y dní. Kolikrát je více dělníků, tolikrát kratší je doba, za kterou vykonají určitou práci. Počet dní y je tedy nepřímo úměrný počtu dělníků x . Tzn. $y = \frac{k}{x}$, kde $k > 0$. Konstantu úměrnosti k určíme, jestliže do této rovnice dosadíme $y = 10$ pro $x = 3$; dostáváme $k = 10 \cdot 3 = 30$. Rovnice příslušné nepřímé úměrnosti je $y = \frac{30}{x}$ a pro $x = 5$ je $y = \frac{30}{5} = 6$.

5 dělníků vykoná zadanou práci za 6 dní.

Příklad 2

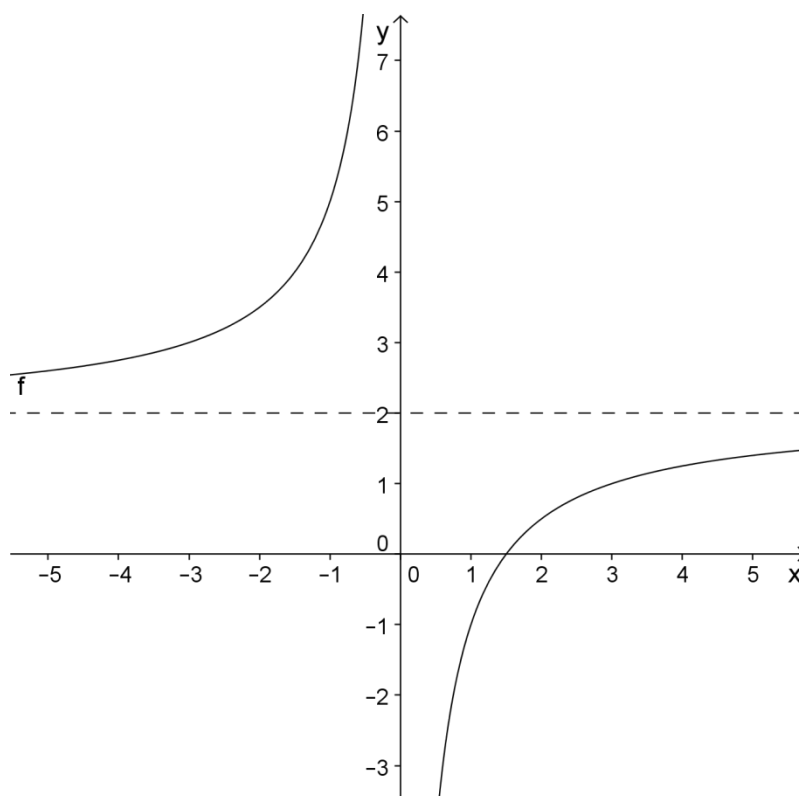
Načrtněte graf funkce $f: y = -\frac{3}{x} + 2$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

Řešení

Je-li funkce zadaná předpisem

$$y = -\frac{3}{x} + 2,$$

pak dojde k posunu osy x o +2 směrem vzhůru do osy x' , osa y se nemění. Zároveň je potřeba stanovit definiční obor funkce, tedy $x \neq 0$.



Graf 1

Průsečíky s osami:

a) $P_x: y = 0$ a proto

$$-\frac{3}{x} + 2 = 0$$

$$\frac{-3 + 2x}{x} = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow P_x \left[\frac{3}{2}; 0 \right]$$

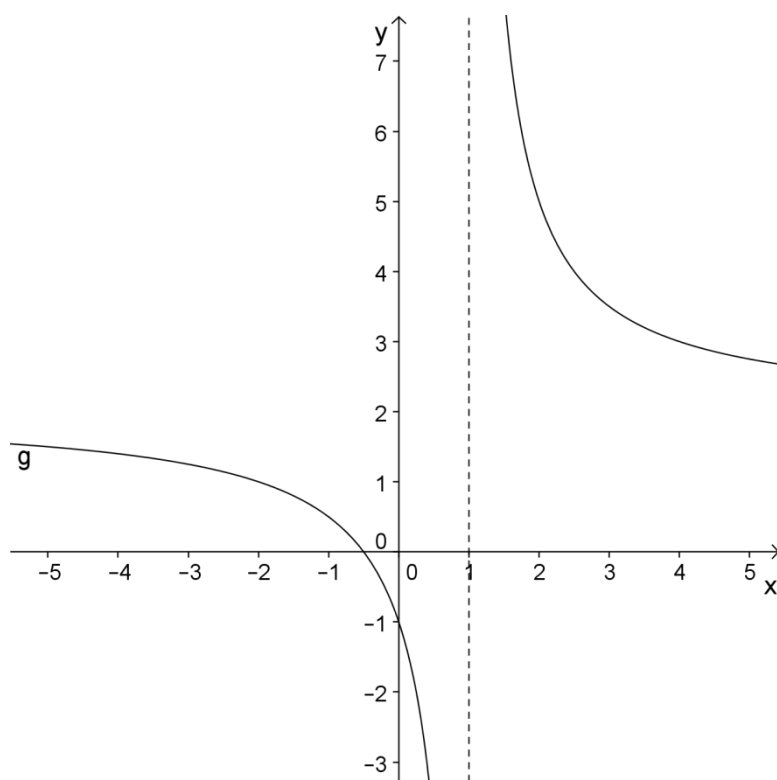
b) $P_y: x = 0$ ale to není vzhledem k definičnímu oboru možné. Proto P_y neexistuje.

Příklad 3

Načrtněte graf funkce $g: y = 2 + \frac{3}{x-1}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

Řešení

Definiční obor funkce je $x \neq 1$. V tomto případě dojde k posunu obou souřadnicových os. Osa x se posune o +2 směrem vzhůru, osa y o +1 směrem doprava.



Graf 2

Průsečíky s osami:

a) $P_x: y = 0$ a proto

$$2 + \frac{3}{x-1} = 0$$

$$\frac{2x - 2 + 3}{x - 1} = 0$$

$$\frac{2x + 1}{x - 1} = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow P_x \left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$$

b) $P_y: x = 0$ a proto

$$y = 2 + \frac{3}{-1} = 2 - 3 = -1 \rightarrow P_y[0; -1]$$

Příklad 4

Načrtněte graf funkce $h: y = \frac{3x+2}{x+1}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

Řešení

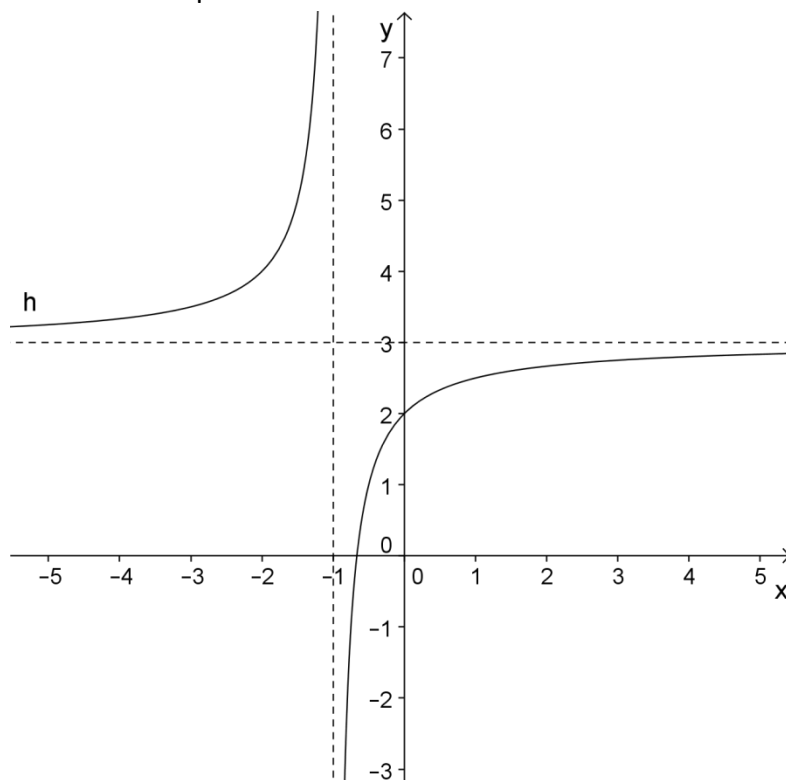
Definiční obor funkce je $x \neq -1$.

Nejprve provedeme dělení mnohočlenů mnohočlenem a upravíme předpis funkce na tvar vhodný pro načrtnutí grafu.

Tedy

$$(3x + 2) : (x + 1) = 3 - \frac{1}{x + 1}$$

V tomto případě dojde k posunu obou souřadnicových os. Osa x se posune o $+3$ směrem vzhůru, osa y o -1 směrem doprava.



Graf 3

Průsečíky s osami:

a) $P_x: y = 0$ a proto

$$\frac{3x + 2}{x + 1} = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \rightarrow P_x \left[-\frac{2}{3}; 0 \right]$$

b) $P_y: x = 0$ a proto

$$y = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow P_y [0; 2]$$

Příklad 5

Načrtněte graf funkce $i: y = \left| \frac{2x+3}{x-2} \right|$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

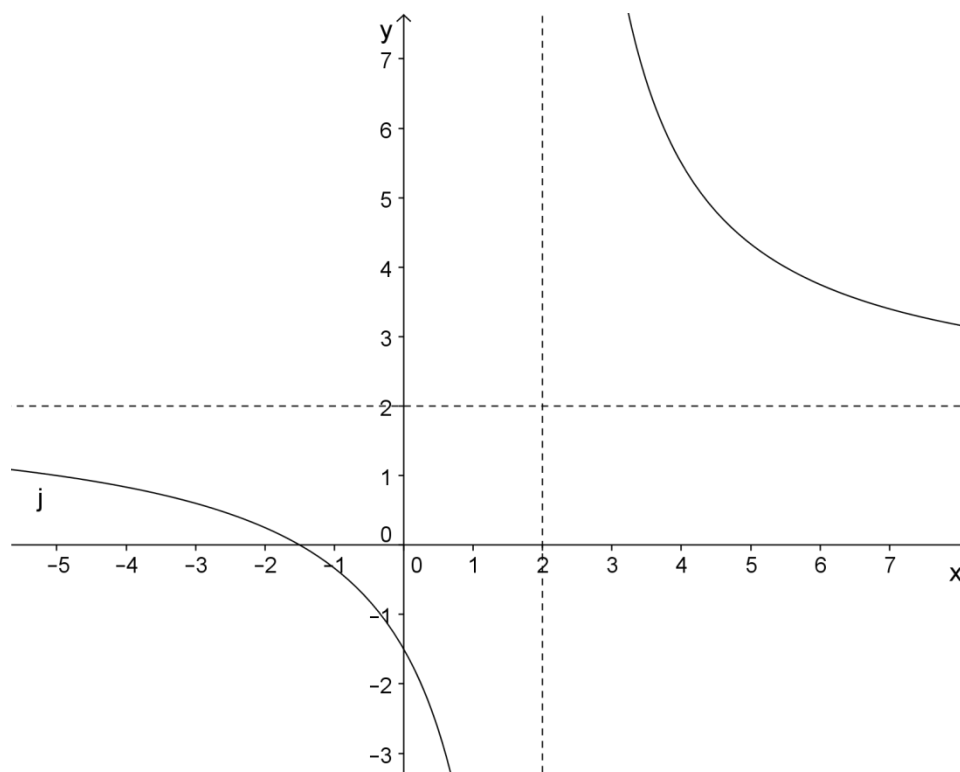
Řešení

Definiční obor funkce je $x \neq 2$. U tohoto typu úlohy nejprve „zapomeneme“ na absolutní hodnotu a budeme pracovat s funkcí $j: y = \frac{2x+3}{x-2}$. Podobně jako v příkladu 4 načrtneme graf funkce j a potom „se vrátíme“ k funkci i .

Tedy $j: y = \frac{2x+3}{x-2}$. Provedeme dělení mnohočlenu mnohočlenem a dostaneme

$$(2x + 3) : (x - 2) = 2 + \frac{7}{x - 2}$$

Vidíme, že osa x se posune o +2 směrem nahoru a osa y se posune o +2 směrem doprava.



Graf 4

Průsečíky s osami:

a) $P_x: y = 0$ a proto

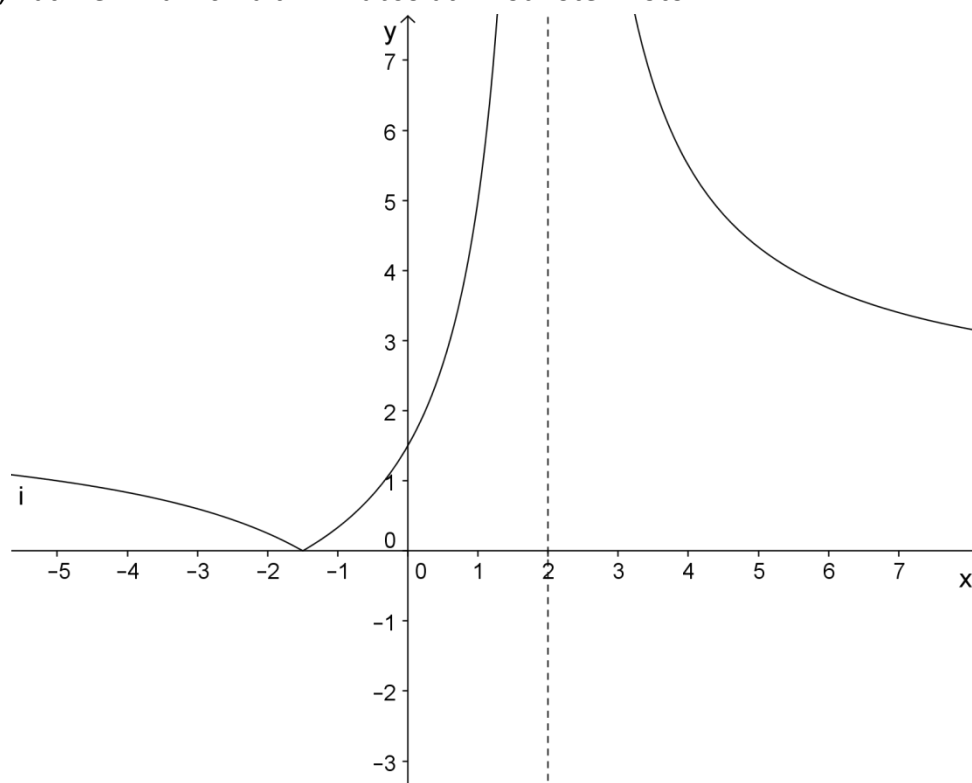
$$\frac{2x + 3}{x - 2} = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \rightarrow P_x \left[-\frac{3}{2}; 0 \right]$$

b) $P_y: x = 0$ a proto

$$y = -\frac{3}{2} \rightarrow P_y \left[0; -\frac{3}{2} \right]$$

Nyní se „vrátíme“ k funkci i a tím i k absolutní hodnotě. Proto:



Graf 5

Příklad 6

Určete předpis pro lineární lomenou funkci, jejímž grafem je hyperbola se středem v bodě $S[-1; 2]$ procházející bodem $A[-2; -1]$.

Řešení

V této chvíli budeme hledat předpis lineární lomené funkce ve tvaru

$$y - n = \frac{k}{x - m},$$

Kde m, n jsou souřadnice středu S hyperboly. Tedy

$$y - 2 = \frac{k}{x + 1}.$$

Zbývá určit hodnotu koeficientu k . Tu zjistíme dosazením souřadnic bodu A za x a y v daném předpisu. Tj.

$$\begin{aligned} -1 - 2 &= \frac{k}{x + 1} \\ -3 &= \frac{k}{-1} \rightarrow k = 3. \end{aligned}$$

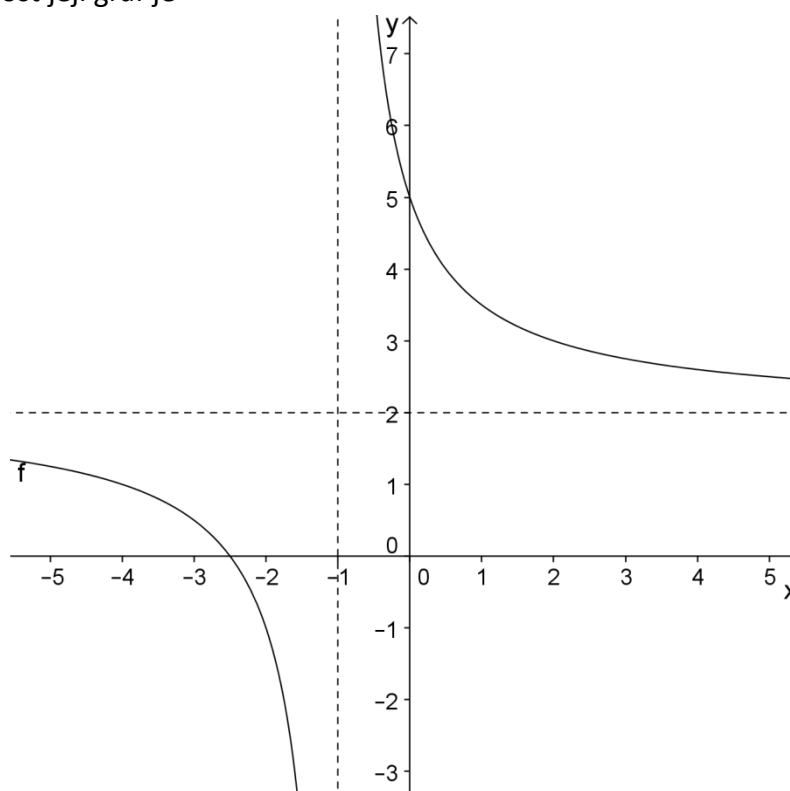
Takže hledaná funkce má předpis $f: y - 2 = \frac{3}{x + 1}$ a po úpravě

$$y = 2 + \frac{3}{x + 1}$$

nebo

$$y = \frac{2x + 5}{x + 1}.$$

Jen pro zajímavost její graf je



Graf 6

Průsečíky s osami:

a) $P_x: y = 0$ a proto

$$x = -\frac{5}{2} \rightarrow P_x \left[-\frac{5}{2}; 0 \right]$$

b) $P_y: x = 0$ a proto

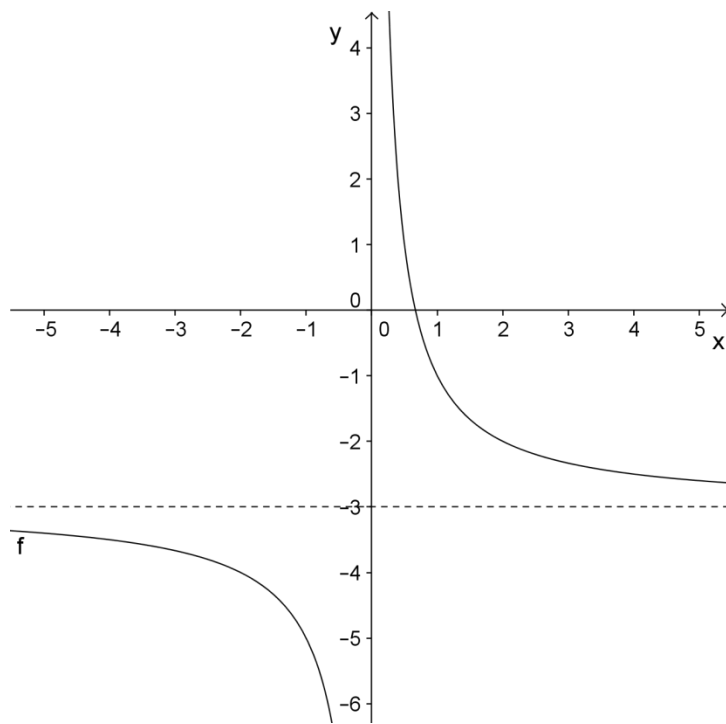
$$y = 5 \rightarrow P_y [0; 5].$$

Úlohy k procvičení

1. 5 dělníků vyrobí 180 výrobků za 3 hodiny. Za kolik hodin vyrobí čtyři dělníci 240 stejných výrobků?

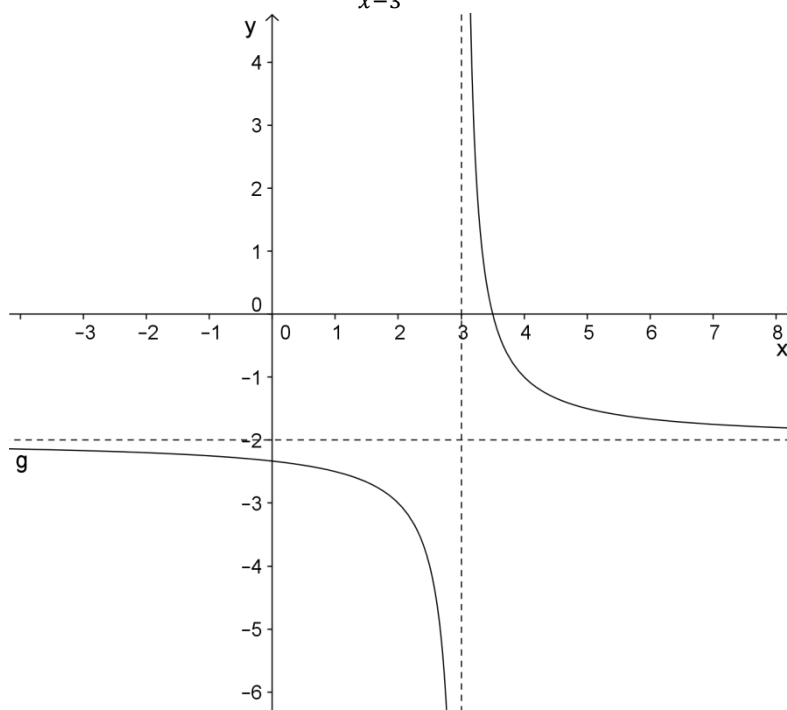
[5 hodin]

2. Načrtněte graf funkce $f: y = \frac{2}{x} - 3$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



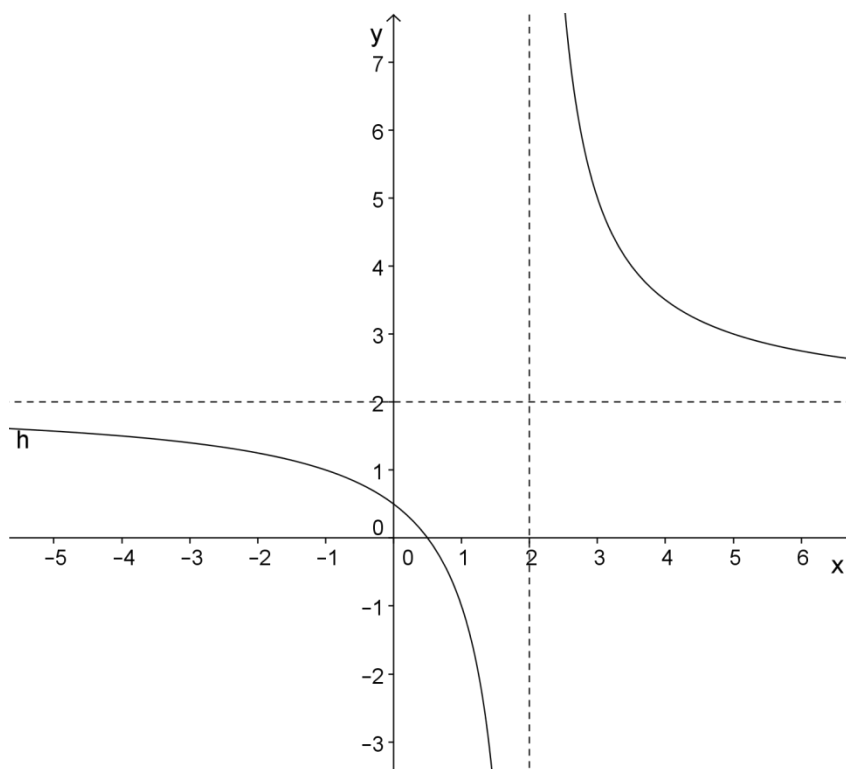
Graf 7

3. Načrtněte graf funkce $g: y = -2 + \frac{1}{x-3}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



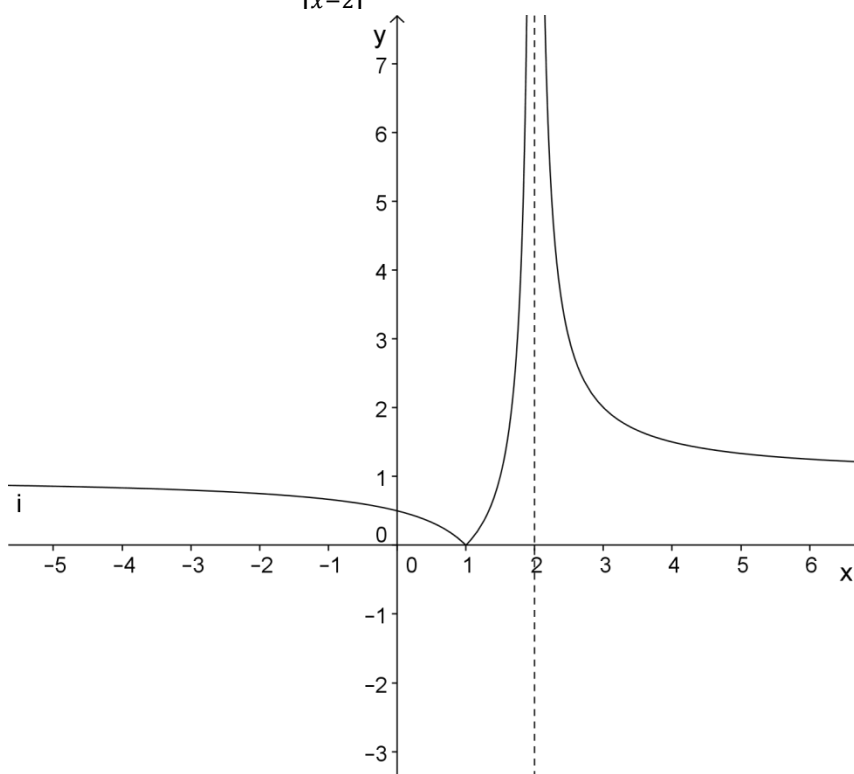
Graf 8

4. Načrtněte graf funkce $h: y = \frac{2x-1}{x-2}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



Graf 9

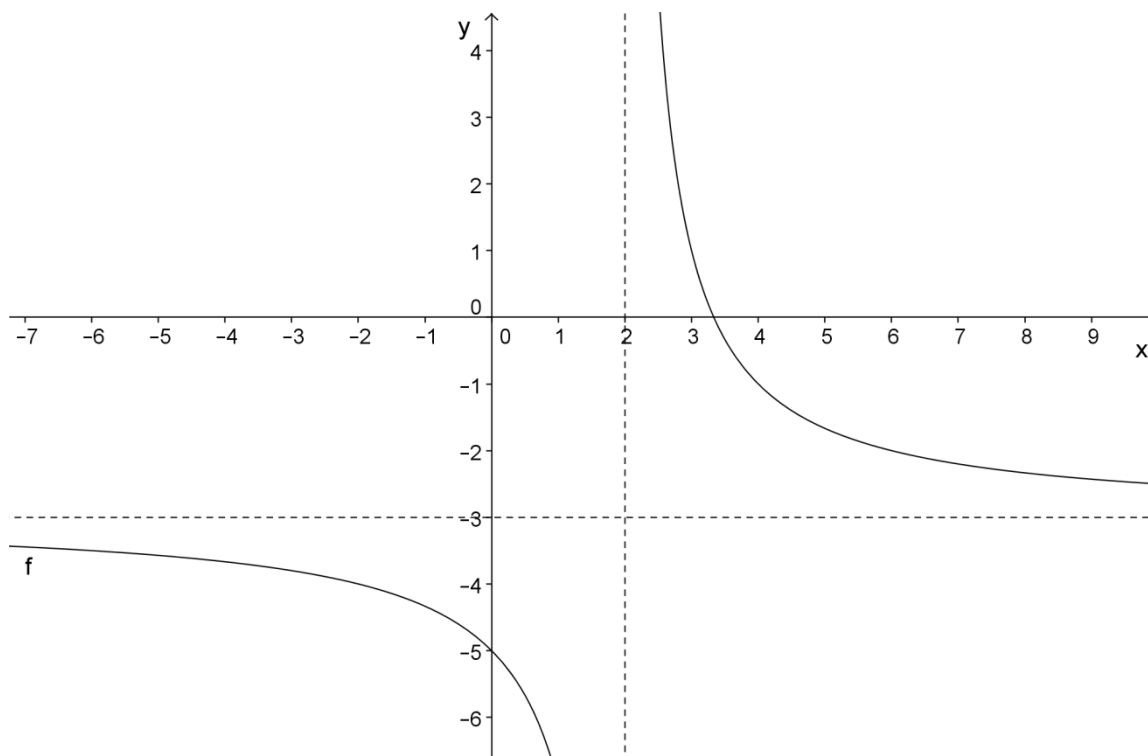
5. Načrtněte graf funkce $i: y = \frac{x-1}{x-2}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



Graf 10

6. Určete předpis pro lineární lomenou funkci, jejímž grafem je hyperbola se středem v bodě $S[2; -3]$ procházející bodem $A[3; 1]$.

$$\left[f: y = -3 + \frac{4}{x-2} = \frac{-3x+10}{x-2} \right]$$



Graf 11

Použité zdroje a literatura:

- BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
- BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
- CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. *Matematika – přehled středoškolského učiva*. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
- FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
- POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.
- SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.