Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

KVADRATICKÁ FUNKCE

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	2. 12. 2012
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí zjistit funkční předpis kvadratické funkce na základě znalosti třech bodů, jimiž prochází graf funkce, umí načrtnout grafy kvadratických funkcí zadaných funkčním předpisem, využívá poznatky o výrazech s absolutní hodnotou a rovnic s absolutní hodnotou k náčrtům kvadratických funkcí s absolutní hodnotou, využívá poznatky o kvadratické funkci při řešení kvadratických rovnic a nerovnic, modeluje závislosti reálných dějů pomocí kvadratické funkce.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že graf funkce prochází body A[1;-2], B[2;4], C[3;4].

Řešení:
Kvadratická funkce má předpis $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Dosadíme do této rovnice za x a y souřadnice zadaných třech bodů. Získáme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých. Soustava má tvar:

$$-2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$
$$4 = a \cdot 2^2 + 2 \cdot b + c$$
$$4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$

Soustavu vyřešíme například pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 12 \\ 0 & -6 & -8 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right)$$

Z poslední matice pak vypočítáme konstanty a, b, c:
$c = -14$
$2b - 42 = -12 => b = 15$
$a + b + c = 15 => a = -3$
Uvedená funkce má funkční předpis: $y = -3x^2 + 15x - 14$.

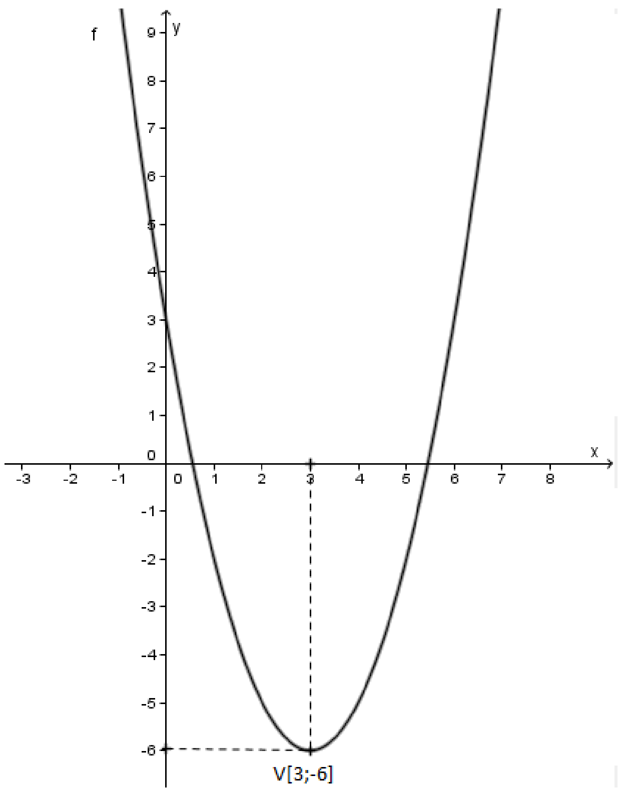
2) Načrtněte grafy kvadratických funkcí zadaných předpisy:

a. $f: y = x^2 - 6x + 3$
b. $g: y = |x^2 - 6x + 3|$
c. $h: y = x^2 - 6|x| + 3$
d. $i: y = |x^2 - 6|x| + 3|$
e. $j: y = x \cdot |x - 6| + 3$

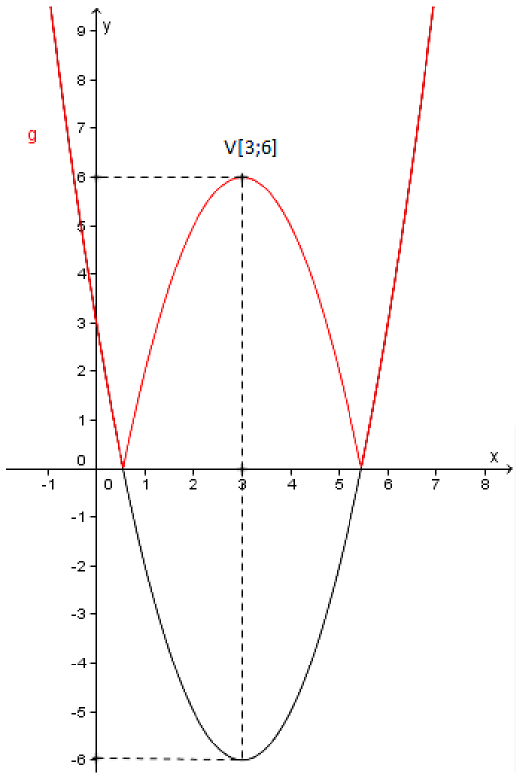
Řešení:

a. Předpis kvadratické funkce převedeme pomocí doplnění na úplný čtverec na takový tvar, který dovedeme načrtnout:
$y = x^2 - 6x + 3 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 3 = (x - 3)^2 - 6$.
Funkci $y = (x - 3)^2 - 6$ je snadné načrtnout, stačí pouze graf funkce $y = x^2$ posunutím o tři jednotky ve směru kladné poloosy x a o šest dolů po ose y. Vrchol paraboly se tak dostane do bodu V[3;-6] viz obr. 1.

b. U grafu funkce $g: y = |x^2 - 6x + 3|$ vyjdeme z poznatku, že pro $y > 0$ je $|y| = y$ a pro $y < 0$ je$|y| = -y$. Využijeme tedy grafu funkce $f: y = x^2 - 6x + 3$. Všechny body nad osou x jsou zároveň body grafu s absolutní hodnotou a všechny body, jež jsou pod osou x, zobrazíme v osové souměrnosti podle osy x (viz obr. 2).

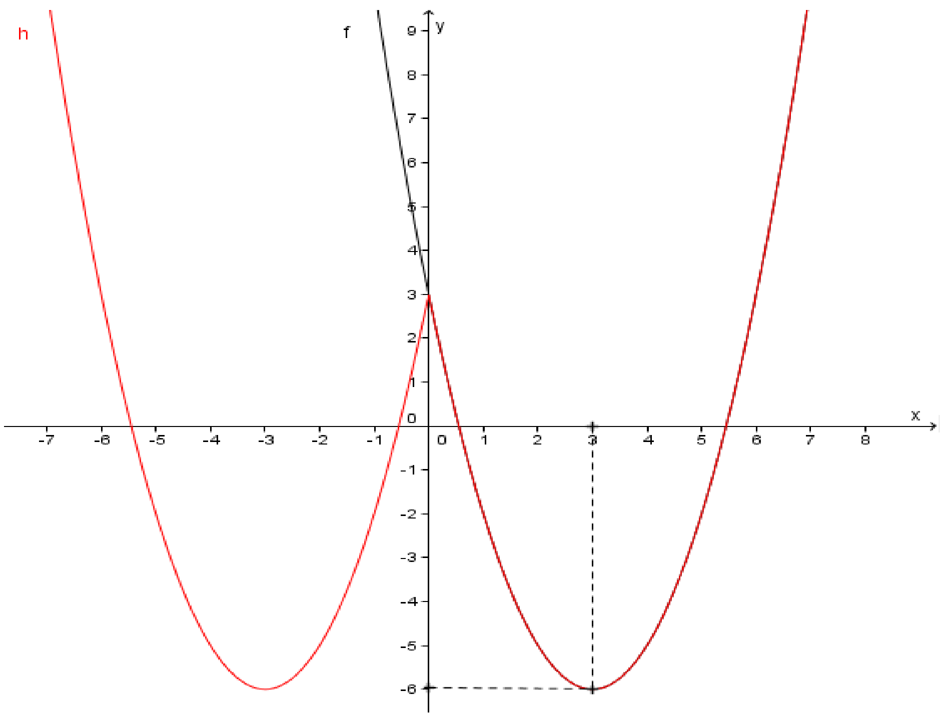


Obr. 1



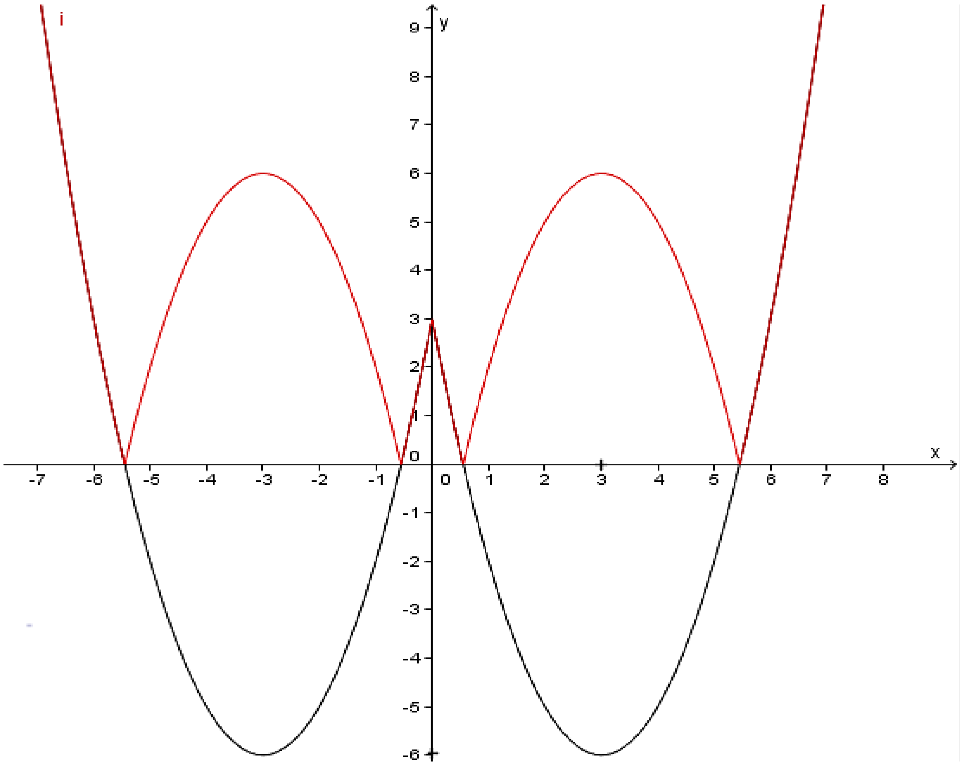
Obr. 2

c. Graf funkce $h: y = x^2 - 6|x| + 3$ je pro všechna $x \in R$ funkcí sudou, je tedy osově souměrná podle osy y. Sestrojíme tedy graf funkce bez absolutní hodnoty a potom část grafu napravo od osy y zobrazíme v osové souměrnosti podle osy y (obr. 3).



Obr. 3

d. Graf funkce $h: y = |x^2 - 6|x| + 3|$ získáme z grafu funkce $h: y = x^2 - 6|x| + 3$ všechny body, jež jsou pod osou x, zobrazíme v osové souměrnosti podle osy x (obr. 4).



Obr. 4

e. Při načrtávání grafu funkce $j: y = x \cdot |x - 6| + 3$ využijeme metodu dělení intervalu.

Najdeme nulový bod absolutní hodnoty:

$$x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

určíme znaménko výrazů v absolutních hodnotách v jednotlivých intervalech určených nulovým bodem:

	$(-\infty; 6)$	$\langle 6; \infty)$
$x - 6$	-	0 +
$\|x - 6\|$	$6 - x$	$x - 6$

Na základě definice absolutní hodnoty (je-li $a \geq 0$, pak $|a| = a$, pokud je $a < 0$, pak $|a| = -a$) určíme funkční předpis v jednotlivých intervalech:

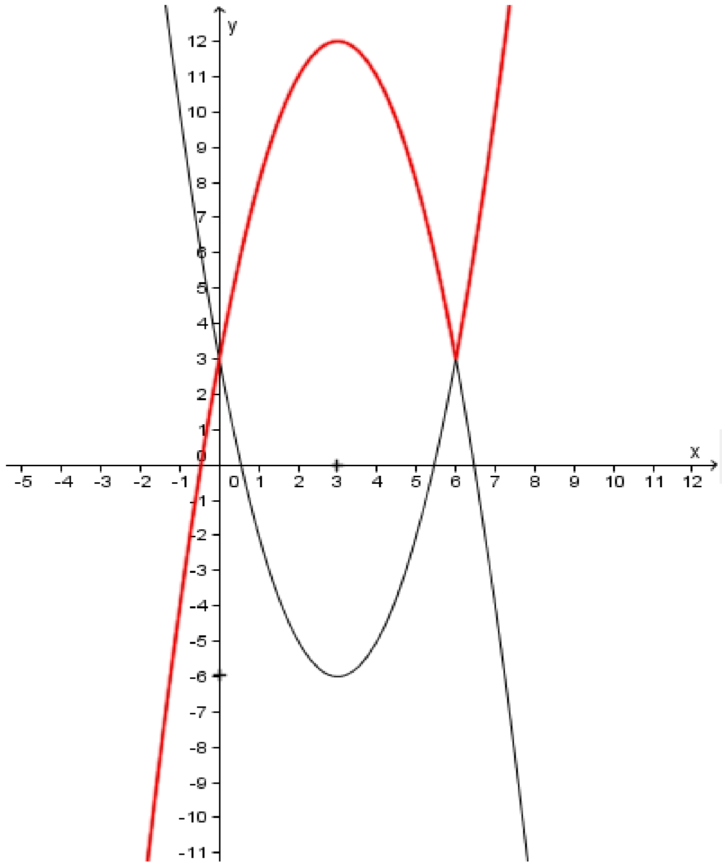
I) $x \in (-\infty; 6)$:

$$y = x \cdot (6 - x) + 3 = -x^2 + 6x + 3 = -(x^2 - 6x + 9) + 9 + 3 = -(x - 3)^2 + 12$$

II) $x \in \langle 6; \infty)$:

$$y = x \cdot (x - 6) + 3 = x^2 - 6x + 3 = (x - 3)^2 - 6$$

Nyní zakreslíme grafy funkcí podle funkčních předpisů získaných v jednotlivých intervalech (viz obr. 5).



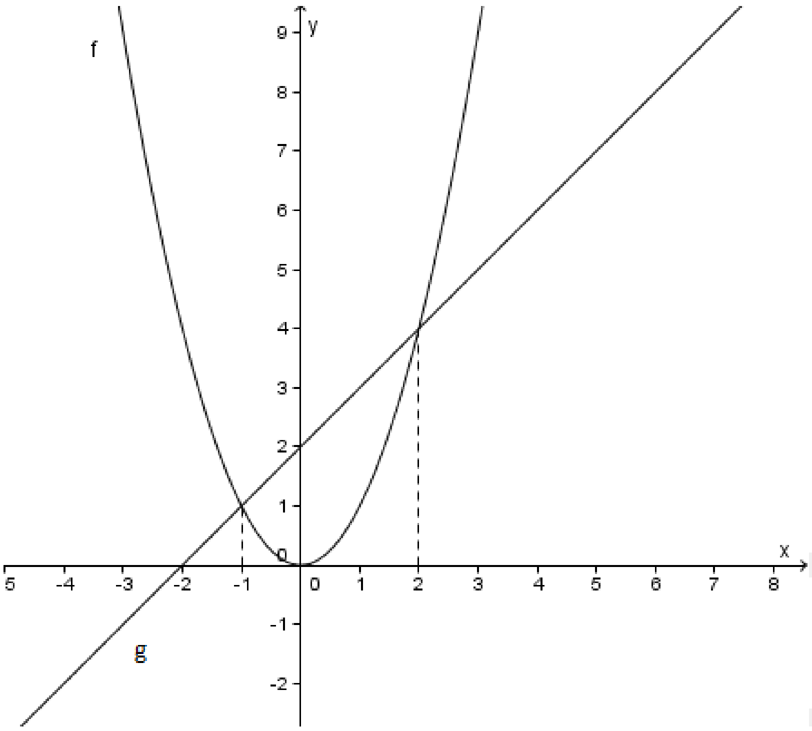
Obr. 5

3. Řešte graficky
   a. rovnici: $x^2 - x - 2 = 0$.
   b. nerovnici: $x^2 - x - 2 > 0$

   Řešení:

   a. Nejjednodušším řešením je převedení dané kvadratické rovnice na tvar $x^2 = x + 2$. Hledáme tedy všechna $x \in R$, pro která platí $f(x) = g(x)$, kde $f: y = x^2$ a $g: y = x + 2$.
   Grafy obou funkcí se protnou v bodech A[-1;1], B[2;4] (viz obr. 6). Existují tedy dvě řešení dané rovnice, a to $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$.

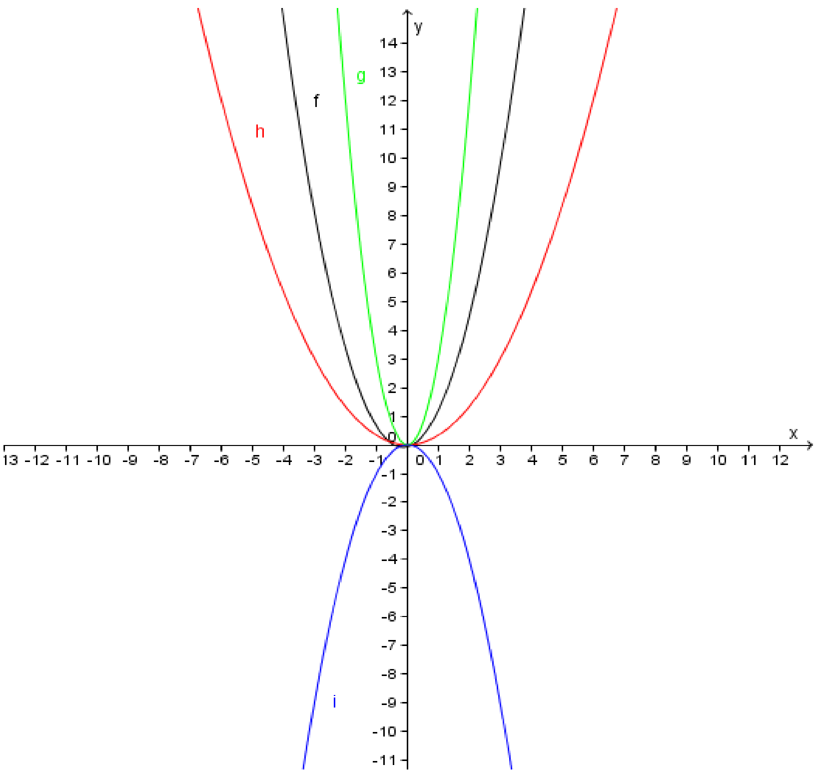
   b. Postup je analogický jako při řešení kvadratické rovnice. Převedeme danou kvadratickou rovnici na tvar $x^2 > x + 2$. Hledáme tedy všechna $x \in R$, pro která platí $f(x) > g(x)$, kde $f: y = x^2$ a $g: y = x + 2$. Zjišťujeme tedy, pro jaká x platí, že graf funkce $f: y = x^2$ „leží nad“ grafem funkce $g: y = x + 2$. Z obr. 6 je zřejmé, že to platí pro všechna $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$



Obr. 6

Příklady k procvičování:

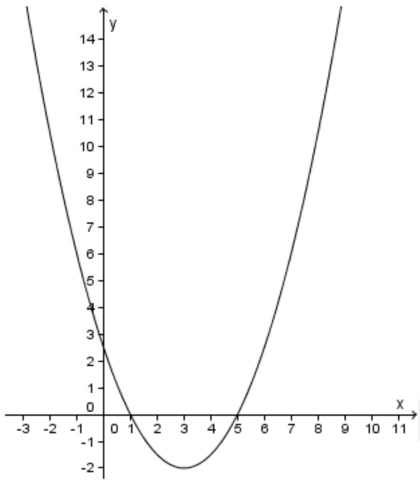
1. Načrtněte grafy následujících funkcí:
   a. $f: y = x^2$
   b. $g: y = 3x^2$
   c. $h: y = \frac{1}{3}x^2$
   d. $i: y = -x^2$



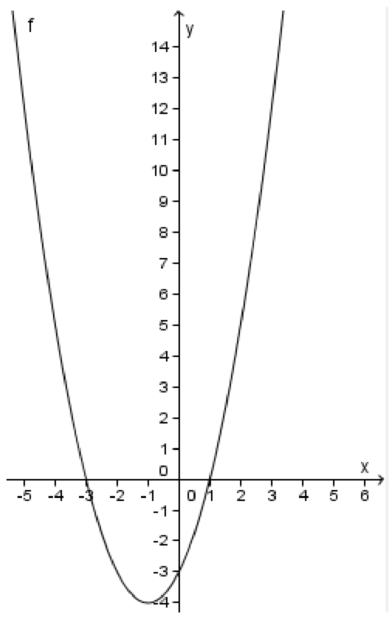
2. Od půlnoci do sedmi hodin ráno se teplota ve stupních Celsia měnila tak, že byla kvadratickou funkcí f času v hodinách. O půlnoci byla naměřena teplota 2,5 °C, ve 4 hodiny -1,5 °C a v 7 hodin 6 °C.
   a. Určete rovnici udávající předpis funkce f.
   b. Načrtněte graf funkce f.
   c. Jaká byla nejnižší teplota a v kolik hodin to bylo?
   d. Jaká byla teplota v 6 hodin ráno?
   e. V jakém časovém intervalu byla teplota pod bodem mrazu?

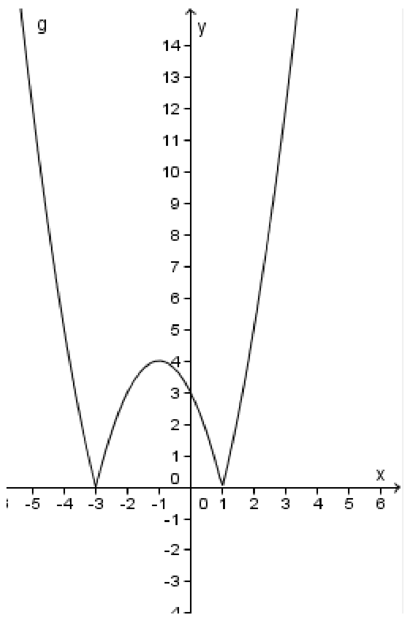
   [a. $f: y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$, $c. V[3; -2]$=>ve tři hodiny ráno byla teplota -2°C. d. 2,5°C, e. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5 < 0$ $<=>$ $x \in (1; 5)$ tedy mezi jednou a pátou ráno.]

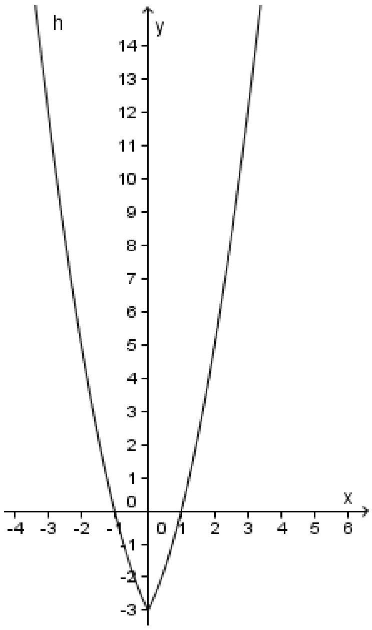
   b.

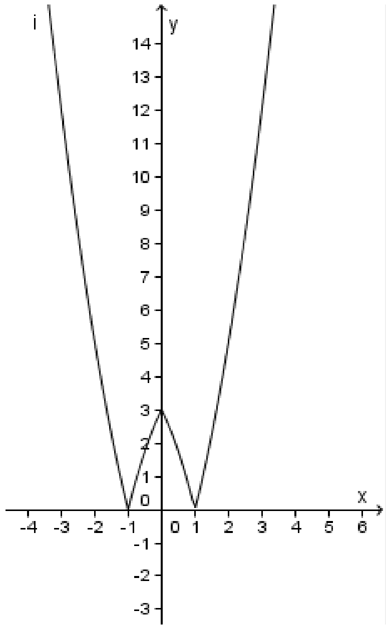


3. Načrtněte grafy funkcí:
   a. $f: y = x^2 + 2x - 3$
   b. $g: y = |x^2 + 2x - 3|$
   c. $h: y = x^2 + 2|x| - 3$
   d. $i: y = |x^2 + 2|x| - 3|$






h
y
x
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6


i
y
x
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Použité zdroje a literatura:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.
BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.
KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
ODVÁRKO, Oldřich A KOL. Matematika pro II. Ročník gymnázií. 1. Vyd. Praha: SPN, 1985.
PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.