INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ZÁKLADNÍ TYPY DŮKAZŮ, MATEMATICKÁ INDUKCE

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	10. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí provést přímý, nepřímý důkaz, důkaz sporem a matematickou indukcí
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené úlohy:

1. Proveďte přímý důkaz a důkaz sporem výroku: $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$.

Řešení:

a) Přímý důkaz

Využijeme schéma přímého důkazu výroku B:

i. Zvolíme pravdivý výrok A.
ii. Dokážeme, že platí $A \Rightarrow B$ (většinou pomocí řetězce implikací).
iii. Závěr: Platí B.

Zadanou nerovnost B: $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$ upravíme na tvar:

B_1: $1 < \sqrt{10+\sqrt{11}} - \sqrt{10-\sqrt{11}}$

Obě strany nerovnice jsou kladná čísla. Při umocněním na druhou obou stran nerovnosti dostaneme: B_2: $1 < 10+\sqrt{11} - 2\sqrt{10+\sqrt{11}}\sqrt{10-\sqrt{11}} + 10 - \sqrt{11}$.

Zjednodušíme: B_3: $1 < 20 - 2\sqrt{100-11}$

B_4: $-\frac{19}{2} < -\sqrt{89}$

B_5: $\frac{19}{2} > \sqrt{89}$

Umocníme na druhou:

B_5: $\frac{361}{4} > 89$

Odtud máme pravdivý výrok:

A: $90{,}25 > 89$.

Tím však ještě důkaz není proveden. Zatím víme, že $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_3 \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_5 \Rightarrow A$ platí, přičemž A platí. Z toho ale neplyne, že B platí. Zatím jsme provedli tzv. rozbor.
Přímý důkaz dostaneme obrácením postupu úprav. Začneme-li od výroku A, ten odmocníme atd. Bude se následně jednat o přičtení či odečtení určitého reálného čísla k oběma stranám nerovnice, umocnění obou nezáporných stran nerovnosti, násobení obou stran nerovnosti týmž nenulovým číslem, což jsou ekvivalentní úpravy, a proto dostáváme, že
$A \Rightarrow B_5 \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_3 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow B$ platí.
Víme, že A platí.

Závěr: B platí.

b) Důkaz sporem:

Schéma důkazu sporem daného výroku B:

i. Vyslovíme předpoklad, že dokazovaný výrok neplatí, tedy že platí jeho negace B´.

ii. Dokážeme, že platí $\neg B \Rightarrow C$ (většinou pomocí řetězce implikací), kde C neplatí.
iii. Závěr: $\neg B$ neplatí $\Rightarrow B$ platí.

Předpokládejme tedy, že výrok $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$ neplatí, tedy platí jeho negace
$\neg B$: $\sqrt{10-\sqrt{11}} \geq \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$
Nyní budeme postupovat jako u přímého důkazu a získáme následující výroky:

$$\neg B_1: \quad 1 \geq \sqrt{10+\sqrt{11}} - \sqrt{10-\sqrt{11}}$$
$$\neg B_2: \quad 1 \geq 10+\sqrt{11} - 2\sqrt{10+\sqrt{11}}\sqrt{10-\sqrt{11}} + 10 - \sqrt{11};$$
$$\neg B_3: \quad 1 \geq 20 - 2\sqrt{100-11}$$
$$\neg B_4: \quad 2\sqrt{89} \geq 19$$

Odtud získáme nepravdivý výrok C: $89 \geq 90{,}25$
Řetězec implikací $\neg B \Rightarrow \neg B_1 \Rightarrow \neg B_2 \Rightarrow \neg B_3 \Rightarrow \neg B_4 \Rightarrow C$ platí, C neplatí.
Závěr: $\neg B$ neplatí. Když neplatí negace původního výroku $\neg B$, pak platí původní výrok B.
Tedy výrok $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$ platí.

2. Dokažte, že $\forall n \in N : 3 | n^2 \Rightarrow 3 | n$.

   Řešení:
   Využijeme nepřímý důkaz. Dokážeme tedy obměněnou implikaci.
   Obměna: $\forall n \in N : 3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$

   $3 \nmid n \Rightarrow$ nastane jedna z možností: $\begin{matrix} n = 3k+1 \\ n = 3k+2 \end{matrix}, k \in Z.$

   i. $n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow 3 \nmid n^2$.
   ii. $n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 =$
   $= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow 3 \nmid n^2$.

   Obměna: $\forall n \in N : 3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$ tedy platí $\Rightarrow$ původní výrok $\forall n \in N : 3 | n^2 \Rightarrow 3 | n$ platí.

3. a) Vyslovte obměnu, obrácení a negaci věty: $\forall n \in N : 2 | n^2 \Rightarrow 2 | n$.
   b) Rozhodněte o pravdivosti všech těchto vět a svá tvrzení dokažte.
   c) Lze na základě řešení předcházejících částí úlohy rozhodnout o pravdivosti věty:
   $\forall n \in N : 2 | n \Leftrightarrow 2 | n^2$?

   Řešení:
   a) Obměna: $\forall n \in N : 2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$.
   Obrácení: $\forall n \in N : 2 | n \Rightarrow 2 | n^2$.
   Negace: $\exists n \in N : 2 | n^2 \wedge 2 \nmid n$.

   b) Původní, obměněná i obrácená implikace jsou pravdivé, negace je nepravdivá.

   Důkazy:

i. Obměna: $\forall n \in N : 2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$. Tuto větu dokážeme přímým důkazem. Pokud provedeme přímý důkaz pravdivosti obměněné věty, potom současně provádíme nepřímý důkaz původní věty.
$2 \nmid n \Rightarrow n =$ 2k+1, kde $k \in Z \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow 2 \nmid n$.

ii. Obrácení: $\forall n \in N : 2|n \Rightarrow 2|n^2$. Také využijeme přímého důkazu:
$2|n \Rightarrow n = 2k, k \in Z \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k \Rightarrow 2|n^2$.

iii. Negace: Tvrzení, že negace ($\exists n \in N : 2|n^2 \wedge 2 \nmid n$) neplatí, lze dokázat pomocí následující úvahy: Pokud n^2 je sudé, lze zapsat $n^2 = 2k,\ k \in Z$. Pokud n je liché, lze zapsat $n = 2l + 1,\ l \in Z \Rightarrow n^2 = (2l+1)^2$. Nyní porovnáme výše uvedená vyjádření n^2:
Muselo by platit: $2k = (2l+1)^2$

$$2k = 4l^2 + 4l + 1$$

$$2k = 2(2l^2 + 2l) + 1$$

Na pravé straně rovnosti máme sudé číslo a na levé straně liché číslo. Výše uvedená rovnost tedy neplatí $\Rightarrow$ negace neplatí.

c) Výše jsme uvedli nepřímý důkaz původní implikace i přímý důkaz obrácené implikace, a tím jsme dokázali ekvivalenci $\forall n \in N : 2|n \Leftrightarrow 2|n^2$. Lze tedy rozhodnout a věta s ekvivalencí je pravdivá.

4. Dokaž pomocí matematické indukce: $\forall n \in N : 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Řešení:

i. Nejprve větu dokážeme pro n=1:
V(1): $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ je pravdivý výrok.

ii. Dále dokážeme, že

$$\forall n \in N : 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Důkaz druhého kroku- nahradím součet $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$ výrazem $\frac{n(n+1)}{2}$:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Druhý krok je dokázán.

Závěr: Uvedená věta platí.

5. Dokažte, že $\forall n \in N : 3|n^3 + 2n$.

Řešení:

i. Nejprve větu dokážeme pro n=1:

V(1) B: $3|1^3+2\cdot 1$ je pravdivý výrok.

ii. Dále dokážeme, že platí $\forall n\in N: 3|n^3+2n \Rightarrow \forall n\in N: 3|(n+1)^3+2(n+1)$

Důkaz druhého kroku- upravujeme výraz $(n+1)^3+2(n+1)$ tak, abychom využili n^3+2n:

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=n^3+2n+3n^2+3n+3=$
$=n^3+2n+3(n^2+n+1)$

Součet rozdělíme na dvě části: n^3+2n je dělitelná 3 vzhledem k předpokladu $3|n^3+2n$ a druhá část $3(n^2+n+1)$ je zřejmě také dělitelná 3, tedy celý součet $n^3+2n+3(n^2+n+1)$ je dělitelný třemi.

Druhý krok je dokázán.

Závěr: Uvedená věta platí.

Příklady k procvičení:

1. Dokažte, že $\forall n\in N: 6|n^3-n$. [Rozložte výraz na součin tří po sobě jsoucích čísel].

2. Dokažte nepřímo větu: $\forall n\in N: 10|n^2+6 \Rightarrow 5\nmid n$.

   [Obměna: $\forall n\in N: 5|n \Rightarrow 10\nmid n^2+6$, tu dokážeme: $5|n \Rightarrow 5|n^2 \Rightarrow 5\nmid n^2+6 \Rightarrow 10\nmid n^2+6$.]

3. Dokažte, že $\forall x\in R: 5\cdot 3^{x+2}-3\cdot 3^{x+1}=36\cdot 3^x$. [Přímý důkaz úpravou levé strany rovnice.]

4. Proveďte přímý důkaz a důkaz sporem výroků:

   a) $\sqrt{13+\sqrt{12}}<1+\sqrt{13-\sqrt{12}}$

   b) $\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{6}}<2+\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{6}}$ [Analogicky jako příklad 1 viz výše.]

5. Dokažte, že číslo log 5 je iracionální.

   [Důkaz proveďte sporem. Negace: log 5 je racionální $\Rightarrow \log 5=\frac{p}{q} \Rightarrow 5=10^{\frac{p}{q}} \Rightarrow 5^q=10^p$,

   ale 5^q -liché, 10^p - sudé, rovnost neplatí, spor.]

6. Dokažte, že $\forall n\in N: 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

[Důkaz proveďte metodou matematické indukce, označíme-li $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, bude $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$.]

7. Dokažte, že $\forall n \in N : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

   [Důkaz proveďte metodou matematické indukce, označíme-li $s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, bude $s_{n+1} = s_n + (n+1)^3$.]

8. Dokažte, že $\forall n \in N : 4 \mid 5^n - 1$.

   [Důkaz proveďte metodou matematické indukce, při ověřování předpokladu vyjádřete $5^{n+1} = 5 \cdot 5^n = 4 \cdot 5^n + 5^n$.]

Použité zdroje a literatura:

BEČVÁŘ. Jindřich a HRUBÝ Dag. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky.* 2. vydání. Praha: Prométheus, 1992. ISBN 80-85849-34-8.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. 4. vydání. Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-076-4.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

VYŠÍN, Jan A KOL. *Úlohy z matematiky*. 4 vydání. Praha: SPN. 1976. ISBN 14-024-83.